गुरूत्वाकर्षण

प्राक्कथन

गुरूत्वाकर्षण के सिद्वान्तों को भली भाँति समझने के लिए इस अध्याय को बनाने में काफी प्रयास किया गया है। इस अध्याय की सही जानकारी आप को हो जाए इसके लिए अध्याय के अन्त में संबन्धित प्रश्न आपके अभ्यास के लिए दिए गए हैं। इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप अभ्यास मालाओं के प्रश्नों को आसानी से हल कर पाएगें। परीक्षा की दृष्टि से यह अध्याय महत्वपूर्ण एवं आसान है।

यह पुस्तिका इस अध्याय में उपयोग होने वाली सभी संकल्पनात्मक (theory) तथा प्रायोगिक व्याख्याओं को सम्मिलित रखती है। प्रत्येक टॉपिक की थ्योरी के साथ उदाहरण दिये गये हैं। प्रत्येक टॉपिक के थ्योरी भाग के अन्त में सभी तरह के मिश्रित (miscellaneous) साधित (solved) उदाहरण दिये हुए हैं, जो इस अध्याय की सभी संकल्पनाओं के अनुप्रयोग को स्पष्ट करते हैं।

विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है, कि प्रत्येक विद्यार्थी इन सभी हल किये उदाहरणों को अवश्य पढ़ें, समझें ऐसा करने से इसे सम्बन्धित टॉपिक को अच्छी तरह समझने में मदद मिलेगी।

गुरुत्वाकर्षण में कुल प्रश्नों की संख्या है :

अध्याय में उदाहरण 18

दृष्टान्तीय उदाहरण 24

कुल प्रश्नों की संख्या 42

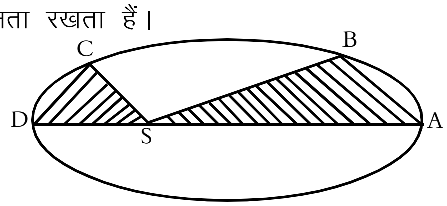
1. कैपलर के नियम

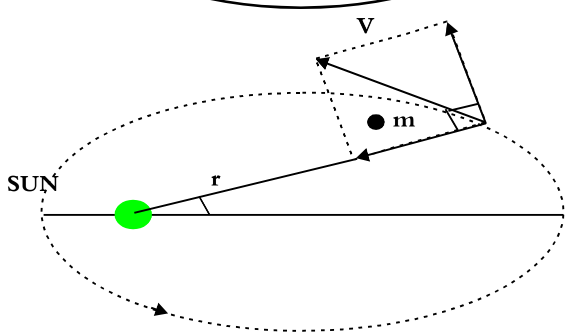
कैपलर ने खगोलिय प्रेक्षणों के आधार पर सूर्य के चारो और ग्रहो के गति के निम्न तीन नियम प्रतिपादित किए

प्रथम नियम (कक्ष का नियम) :– प्रत्येक ग्रह सूर्य के चारो ओर दीर्घवृताकार कक्षा में परिक्रमण करता है तथा सूर्य कक्षा के एक फोकस पर होता है –

द्वितीय नियम (क्षेत्रफल का नियम) :– किसी भी ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों में समान क्षेत्राफल पार करती है। यानि ग्रह की क्षेत्रिय चाल नियत रहती है –

यह द्वितीय नियम हमे बताता है कि ग्रह जब सूर्य से अधिकतम दूरी पर होगा तब उसकी कक्षीय चाल न्यूनतम होगी एवं जब वह ग्रह सूर्य से निकटतम होगा तब उसकी कक्षीय चाल अधिकतम होगी अतः हम कह सकते है कि यह नियम कोणीय संवेग के संरक्षण के नियम से समानता रखता हैं।





; fn xzg dks A से B तक जाने में t_1 समय व C से D तक जाने में t_2 समय लगे तो

यदि $t_1 = t_2$ तब Area SBA = Area SCD

यदि $t_1 > t_2$ तब Area SBA > Area SCD

यदि $t_1 < t_2$ तब Area SBA < Area SCD

कक्षीय चाल = $\dfrac{L}{2m} = \dfrac{vr}{2}$, जहाँ L = कोणीय संवेग है।

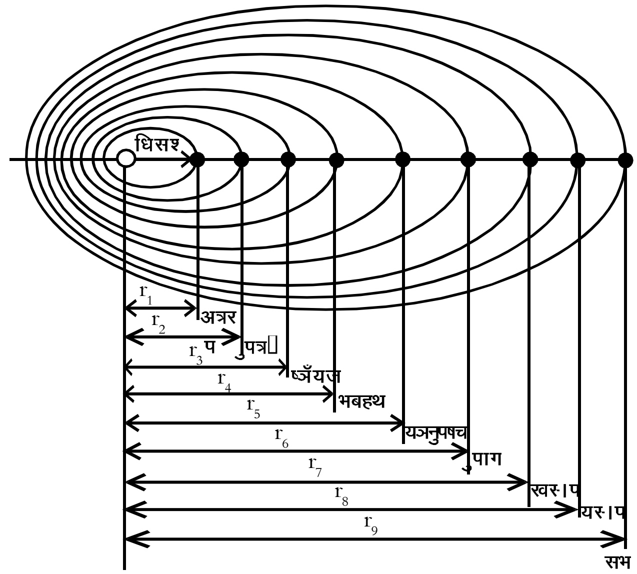
यहाँ V = रेखीय गति का r के लम्बवत भाग है

r = किसी भी ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा की लम्बाई हैं m = ग्रह का भार हैं

नोट :- जब ग्रह सूर्य के समीप होता है तो उसकी चाल अधिकतम होती है तथा जब सर्वाधिक दूर होता है तब उसकी चाल न्यूनतम होती है।

तृतीय नियम (आवर्त काल का नियम):– ग्रह का आवर्त काल (T) का वर्ग, ग्रह व सूर्य के बीच की औसत दूरी (r) की तृतीय घात के समानुपाती होता है यानि –

$T^2 \propto r^3$ या $T^2 = kr^3$ k = नियतांक



नोट :–

a) इस नियम से स्पष्ट है कि जो ग्रह सूर्य से जितना अधिक दूर होगा, उसका परिभ्रमण काल (आवर्तकाल) उतना ही अधिक होगा। सूर्य से सबसे निकट ग्रह बुद्ध का आवर्त काल 88 दिन व सर्वाधिक दूर ग्रह प्लूटो के लिए आवर्त काल 248 वर्ष है।

b) कैपलर के नियम उपग्रहो की गति के लिए भी लागू होते है।

c) सूर्य के सभी ग्रहो के लिए –

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \text{-------------------} = \text{constant}$$

d) सूर्य के निकट आने पर ग्रह का रेखीय वेग बढता है।

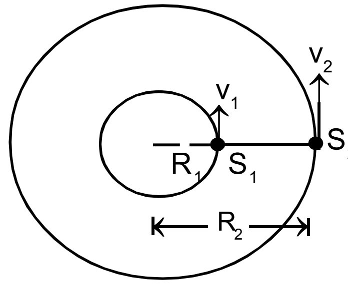
Examples based on कैपलर के नियम

उदा.1 दो उपग्रह S_1 व S_2 किसी ग्रह के चारों ओर समान दिशा में चक्कर लगा रहे है। इनके आवर्तकाल क्रमशः 1 घंटा व 8 घंटे है S_1 की त्रिज्या 10^4 है। S_2 की S_1 के सापेक्ष वेग होगा -

(A) $\pi \times 10^4$ km/hr (B) $\pi/3 \times 10^4$ km/hr
(C) $2\pi \times 10^4$ km/hr (D) $\pi/2 \times 10^4$ km/hr

हल (केपलर के नियम से)

$$T^2 \propto r^3 \therefore \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$



$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{10^4}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 4 \times 10^4 \text{ km}$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\therefore \quad |v_2 - v_1| = 2\pi\left(\frac{r_1}{T_1} - \frac{r_2}{T_2}\right) = \pi \times 10^4 \text{ km/hr}$$

उदा.2 उपरोक्त उदाहरण में S_1 में बैठे अन्तरिक्ष यात्री द्वारा प्रेक्षित S_2 का कोणीय वेग होगा -

(A) $\pi/3$ rad/hr (B) $\pi/3$ rad/sec
(C) $\pi/6$ rad/hr (D) $2\pi/7$ rad/hr

हल S_1 में बैठे अन्तरिक्ष यात्री द्वारा प्रेक्षित, S_1 का कोणीय वेग (जब उनके बीच में निकटतम दूरी $R_2 - R_1 = 3 \times 10^4$ km)

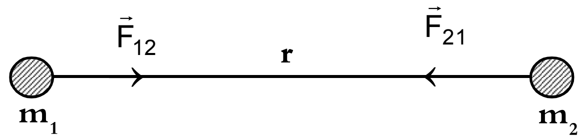
$$w = \frac{v_2 - v_1}{r_2 - r_1} = -\frac{\pi \times 10^4}{3 \times 10^4} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad/hr},$$

$$|\omega| = \frac{\pi}{3} \text{ rad hr}$$

2. न्यूटन का गुरूत्वाकर्षण का नियम

i) विश्व का प्रत्येक कण एक दूसरे कण को आकर्षित करता है। इस सर्वव्यापी आकर्षण बल को ''गुरूत्वाकर्षण बल'' कहते है।

ii) दो द्रव्यकणों के मध्य लगने वाला आकर्षण बल कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती होता है तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। तथा यह दोनो कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश लगता है।



$$\therefore \quad F \propto m_1 m_2 \text{ तथा } F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{या} \quad F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

iii) G सार्वत्रिाक गुरूत्वाकर्षण नियतांक है तथा
$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 / kg^2
या $G = 6.67 \times 10^{-8}$ dyne cm^2 / gm^2

iv) G की विमा $[M^{-1} L^3 T^{-2}]$ होती है।

v) बिन्दु द्रव्यमान (2) पर (1) के कारण बल सदिश निरूपण में -

$$\vec{F}_{21} = \frac{G m_1 m_2}{{r_{12}}^2} \hat{r}_{12}$$

$\hat{r}_{12}$ की दिशा 1 से 2 की तरफ है।

$$\vec{F}_{21} = \frac{G m_1 m_2}{{r_{12}}^2} \vec{r}_{21}.$$

इसी तरह से $\vec{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r_{21}} \vec{r}_{21}.$

vi) $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

लेकिन $|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$

यानि कणों से बीच लगने वाला बल एक दूसरे बराबर परन्तु विपरीत दिशा में होता है।

vii) यह बल प्रकृति का सबसे कमजोर बल होता है।

नोट :- दो इलेक्ट्रोनो के मध्य लगने वाले गुरूत्वीय व विद्युत बलों का अनुपात $\frac{F_g}{F_e} = 10^{-43}$ के कोटि का होता है।

viii) इस बल की परास सबसे अधिक होती है तथा यह अनन्त होती है।

ix) G का मान बहुत कम होने के कारण हम इसे दैनिक जीवन में गुरूत्वाकर्षण बल महसूस नहीं करते है, परन्तु आकाशीय पिण्डो का द्रव्यमान इतने अधिक होते है कि उनके मध्य के आकर्षण बल का परिमाण काफी अधिक होता है। ग्रहो एव उपग्रहों की गति इसी के कारण होती है तथा यह बल इन्हे आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।

x) यदि पृथ्वी का घनत्व समान माना जाय तब किसी वस्तु के पृथ्वी के अन्दर की ओर जाने से उस पर गुरूत्वाकर्षण का मान घटता जाता है क्योकि जिस स्थान पर वस्तु होती है उससे बाहर की त्रिाज्या के बराबर की पृथ्वी उस वस्तु पर कोई बल नही लगाती है इस प्रकार गुरूत्वाकर्षण का मान घट जाता है।

Examples based on

न्युटन के गुरूत्वाकर्षण

उदा.3 एक द्रव्यमान M दो भागों m व (M-m) में टूटता है, जो किसी निश्चित दूरी पर पृथक्कृत हो जाते हैं। इन दोनों भागों के बीच गुरूत्वीय बल न्यूनतम होने है (m / M) होगा -

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

हल यदि m व (M-m) के बीच की दूरी r हो, तो गुरूत्वीय

बल $F = G\frac{m(M-m)}{r^2} = \frac{G}{r^2}(mM - m^2)$

(बल न्यूनतम होगा यदि)

$\frac{dF}{dM} = 0$ (as M and r are constants)

i.e. $\frac{d}{dM}\left[\frac{G}{r^2}(mM - m^2)\right] = 0$ or $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$

3. गुरूत्वीय तथा जड़त्वीय द्रव्यमान

जड़त्वीय द्रव्यमान :– जब द्रव्यमान जड़त्व के गुण के आधार पर परिभाषित किया जाता है, तो यह जड़त्वीय द्रव्यमान कहलाता है.

गुरूत्वीय द्रव्यमान :– जब द्रव्यमान गुरूत्व के गुण के आधार पर परिभाषित किया जाता है, तो यह गुरूत्वीय द्रव्यमान कहलाता है।

जड़त्वीय द्रव्यमान के गुण :–

i) यह वस्तु पर लगाये गये बाह्‌य बल व वस्तु में उत्पन्न त्वरण के अनुपात के बराबर होता है –

$$m = \frac{F}{a}$$

ii) यह वस्तु में उपस्थित द्रव्य की मात्राा के अनुक्रमानुपाती होता है।

iii) यह वस्तु की आकृति, आकार व अवस्था पर निर्भर नहीं करता है।

iv) इस पर पास में रखी वस्तुओं का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

v) जब अनेक द्रव्यमानों को एक साथ रखा जाता है, तो जडत्वीय द्रव्यमान, अदिश योग के अनुसार जुड जाते है।

vi) यह वेग के बढ़ने के साथ बढता है, जिसे निम्न समी. से दिया जाता है।

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2)}},$$

जहाँ m_o = वस्तु का विराम द्रव्यमान, C = प्रकाश का वेग व V = वस्तु का वेग

नोट :–

i) यह पाया जाता है कि दो गुरूत्वीय द्रव्यमानों का वही अनुपात होता है, जो उनके जडत्वीय द्रव्यमानों का

ii) यदि किसी गेंद को ऐसी सुरग में डाला जाए जो कि धरती के दोनो ध्रुवो एवं केन्द्र पर से गुजरी है तो वह गेद उस सुरंग में सरल आवर्त गति करेगी।

Examples based on

गुरूत्वीय तथा जड़त्वीय द्रव्यमान

उदा.4 यदि कोई वस्तु जिसका द्रव्यमान $\sqrt{3}$ किग्रा है प्रकाश की आधी गति से गतिमान है तो उस वस्तु का जड़त्वीय द्रव्यमान होगा।

(A) 2 किग्रा (B) 1 किग्रा

(C) $\sqrt{3}$ किग्रा (D) 0

हल (A) $M_0 = \sqrt{3}$ किग्रा

$$V = \frac{c}{2} \Rightarrow M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{C^2}{4C^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \text{ किग्रा}$$

4. गुरूत्वीय त्वरण

a) गुरूत्वाकर्षण के कारण पिण्ड मे उत्पन्न त्वरण को गुरूत्वीय त्वरण कहते है –

b) मुक्त रूप से पृथ्वी की ओर गिरने वाली वस्तु के वेग में एक सेकण्ड में होने वाली वृद्धि को गुरूत्वीय त्वरण कहते है

c) गुरूत्वीय त्वरण उस बल के बराबर होता है, जिस बल से पृथ्वी एंकाक द्रव्यमान वाली वस्तु को अपने केन्द्र की ओर आकर्षित करती है

d) पृथ्वी केन्द्र से r दूरी पर यदि m द्रव्यमान को लगने वाला आर्कषण बल F हो तो उस स्थान पर गुरूत्वीय त्वरण g होगा–

$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_e}{r^2}$ M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान

e) $g = \frac{GM_e}{r^2}$ में पिण्ड का द्रव्यमान m नहीं है। अतः किसी स्थान पर g का मान वस्तु के द्रव्यमान आकार आकृति या रूप पर निर्भर नहीं करता है। अतः भिन्न भिन्न द्रव्यमान आकार या आकृति की वस्तुऐं मुल रूप से गिराई जावें तो इनके समान त्वरण उत्पन्न होगा तथा यदि सामने ऊंचाई से गिराई जावे तो पृथ्वी सतह पर साथ–साथ पहुँचेगी।

f) पृथ्वी सतह पर g का मान 9.80 m/s^2 अथवा 981 cm/s^2. होता है। तथा इसकी विमा $[M^o L^1 T^{-2}]$ होती है।

g) g का मान निम्न बातों पर निर्भर करता है –

A) पृथ्वी की सतह से ऊँचाई पर

B) पृथ्वी सतह से गहराई पर,

C) पृथ्वी के घूर्णन के कारण अंक्षाश पर

D) पृथ्वी की अण्डाकार आकृति के कारण

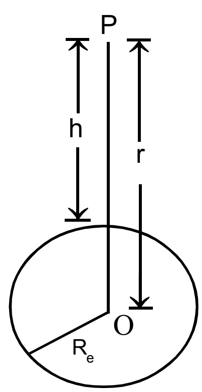
'g' के मान में परिवर्तन

A) पृथ्वी की सतह से ऊँचाई पर

i) ऊँचाई के साथ पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर g का मान घटता है –

माना एक बिन्दु P पृथ्वी सतह से ऊँचाई पर या पृथ्वी केन्द्र से r दूरी पर है।

बिन्दु P पर गुरूत्वीय त्वरण –



$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2}$$

$r = h + R_e$,जहाँ R_e पृथ्वी की त्रिज्या हैं

$$g' = g\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2 = \frac{gR_e^2}{r^2} \Rightarrow \therefore g' < g$$

ii) जैसे–जैसे हम पृथ्वी सतह से ऊपर जाते है तो g का मान घटता है।

$$g' \propto \frac{1}{r^2}\ , \quad r > R_e \text{ के लिये}$$

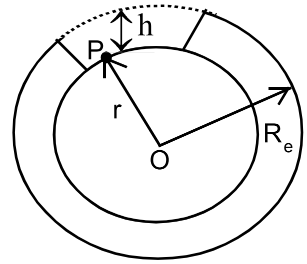
iii) यदि $h << R_e$ तब $g' = g\left(1-\frac{2h}{R_e}\right)$

iv) यदि $r = \infty$ तो $g' = 0$ यानि पृथ्वी से अनन्त दूरी पर g का मान शून्य होता है?

v) पृथ्वी सतह पर g का मान (h = 0)

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

B) गहराई के साथ :–



i) पृथ्वी तल से नीचे जाने पर भी g का मान घटता है

ii) पृथ्वी सतह से h गहराई पर g का मान g_h तथा पृथ्वी पर g हो तो –

$$g_h = g\left(1-\frac{h}{R_e}\right) = g\frac{(R_e-h)}{R_e} = \frac{gr}{R_e}$$

यानि $g_h < g$, r पृथ्वी के केन्द्र से दूरी है। यदि $(r < R_e)$ तो $r = R_e - h$.

iii) यदि पृथ्वी के पदार्थ का घनत्व d माना जावे तो बिन्दु P पर लगने वाला बल होगा।

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad \text{जहां} \quad M = \frac{4}{3}\pi\ (R_e - h)^3\ d\ ;$$

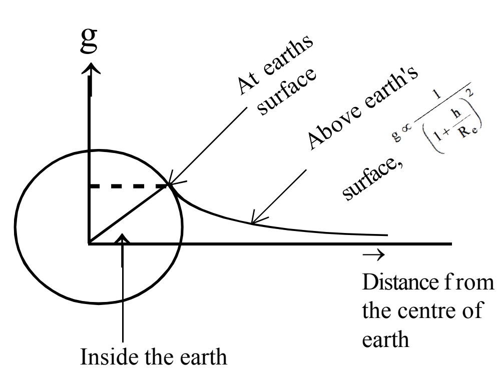
$$r^2 = (R_e - h)^2 \Rightarrow g_n = \frac{4}{3}\pi\ G\ (R_e - h)\ d$$

iv) यदि $h = R_e$ (यानि r = 0) हो तो g = 0 यानि पृथ्वी के केन्द्र पर g का मान शून्य होता है।

v) पृथ्वी की सतह पर g का मान अधिकतम होता है।

vi) g के मान में ऊँचाई व गहराई के साथ परिर्वतन को निम्न ग्राफ से प्रदर्शित किया जा सकता है।

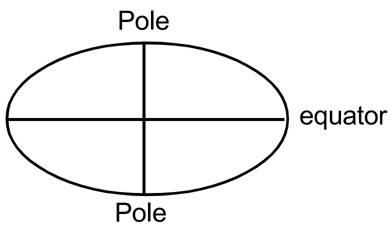
गुरूत्वीय तीव्रता का पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के साथ ग्राफीय निरूपण



C) पृथ्वी की सतह पर g में परिर्वतन

1) पृथ्वी के आकार के कारण :–

i) पृथ्वी पूरी तरह से गोल नहीं है। यह ध्रुवो पर चपटी है, अतः भूमध्य रेखा पर पृथ्वी की त्रिज्या R_e का मान ध्रुवों पर पृथ्वी की त्रिज्या R_p से अधिक होता है। फलस्वरूप



$g_e = \dfrac{GM_e}{R_e^2}$ (भूमध्य रेखा पर)

$g_p = \dfrac{GM_e}{R_p^2}$ (ध्रुव पर)

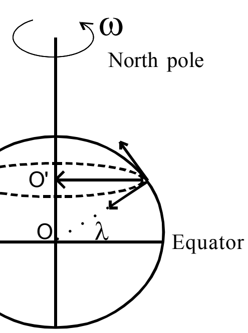
$\because$ $R_e > R_p$ अतः $g_e < g_p$

अतः ध्रुवो पर g का मान भूमध्य रेखा पर g के मान से अधिक होता है।

ii) $\dfrac{g_p}{g_e} = \dfrac{R_e^2}{R_p^2}$

iii) R_p का मान R_e के सापेक्ष 21 किलोमीटर कम होता है। अतः $g_p - g_e = 0.02 m/s^2$

2) पृथ्वी के घूर्णन के कारण –



i) पृथ्वी अपने अक्ष पर पश्चिम से पूर्व की ओर नियत चाल ω से घूमती है।

ii) अक्ष किसी λ अक्षांश पर बिन्दु P, r त्रिज्या के वृत्त में गति करता है। वहाँ पर किसी पिण्ड को रखने पर उस पर लगने वाले आकर्षण बल का कुछ भाग उसे अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने में प्रयुक्त हो जाता है तथा जिससे आकर्षण बल का मान कम हो जाता है, इससे g का मान कम हो जाता है।

iii) यदि ω पृथ्वी का घूर्णन वेग, R_e पृथ्वी की त्रिज्या हो तो λ अक्षांश पर g' का मान निम्न होगा –

$g' = g_o - \omega^2 R_e \cos^2 \lambda$

या $g' = g_o - 0.0337 \cos^2 \lambda$

g_o पृथ्वी के ध्रुवो पर g का मान है।

iv) यदि $\lambda = 0$ अर्थात भूमध्य रेखा पर

$g' = g_0 - \omega^2 R_e \Rightarrow \; = g_0 - .0337$

(न्यूनतम मान)

v) यदि $\lambda = 90^o$ अर्थात ध्रुव पर

$\therefore$ $\cos \lambda = 0 \Rightarrow g' = g$ (अधिकतम मान)

vi) इस प्रकार पृथ्वी की सतह पर सर्वाधिक मान ध्रुवो पर होता है, जबकि न्यूनतम मान भूमध्य (विषुवत) रेखा पर होता है। फलस्वरूप ध्रुवो पर वस्तु का भार अधिकतम होता है एवं जैसे–जैसे भूमध्य रेखा की तरफ आते है, वस्तु के भार में कमी होती जाती है। भूमध्य रेखा पर वस्तु का भार न्यूनतम होता है।

vii) यदि पृथ्वी घूर्णन करना बंद कर दे तो ध्रुवों के अलावा सब स्थानों पर g का मान बढ़ जायेगा।

इसी तरह से यदि पृथ्वी अपने अक्ष पर धूर्णन चाल बड़ा दे तो ध्रुवो के अलावा सब स्थानों पर g का मान घट जाऐगा।

viii) पृथ्वी के घूर्णन का सर्वाधिक प्रभाव भूमध्य रेखा पर होता है, जबकि घूर्णन का प्रभाव ध्रुवो पर शून्य होता है।

ix) यदि $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R_e}}$ हो, तो भूमध्य रेखा पर वस्तु का भार शून्य हो जाता है, परन्तु द्रव्यमान अपरिवर्तित रहता है।

a) यानि पृथ्वी अपने वर्तमान कोणीय वेग से 17 गुना तेज घूमने लगे तो $g_{equator} = 0$ होगा

b) इस अवस्था में पृथ्वी के घूर्णन गति का आवर्तकाल 24 घण्टे के स्थान पर 1.41 घण्टे होगा

Examples based on **गुरूत्वीय त्वरण पर आधारित**

उदा.5 पृथ्वी का कोणीय वेग क्या हो, जिससे भूमध्य रेखा पर स्थित वस्तु भारहीनता की स्थिति में हो –
(g = 10m/s^2 and radius of earth = 6400 km) -

(A) 1.25×10^{-3} rad/sec
(B) 1.25×10^{-2} rad/sec
(C) 1.25×10^{-4} rad/sec
(D) 1.25×10^{-1} rad/sec

हल (A) $g' = g - R_e\omega^2$

(यदि वस्तु भारहीनता की स्थिति में हो, तो)

$g' = 0 \Rightarrow g - R_e\omega^2 = 0$ (भूमध्य रेखा पर $\lambda = 0$)

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{10}{6400 \times 10^3}}$$

$= 1.25 \times 10^{-3}$ rad/sec.

उदा.6 पृथ्वी की अपनी अक्ष पर चाल क्या हो, जिससे भूमध्य रेखा पर स्थित व्यक्ति का भार वर्तमान भार का 3/5 भाग हो (पृथ्वी की भूमध्य रेखीय त्रिज्या 6400 km.) -

(A) 3.28×10^{-4} rad/sec

(B) 7.826×10^{-4} rad/sec

(C) 3.28×10^{-3} rad/sec

(D) 7.28×10^{-3} rad/sec

हल (B)

भूमध्य रेखा पर व्यक्ति का आभासी भार (latitude $\lambda = 0$) is given by

$w^1 = w - m\,R_e\omega^2$,

$$W^1 = \frac{3}{5}\,W = \frac{3}{5}\,mg$$

$$\frac{3}{5}\,mg = mg - mR_e\omega^2$$

$$\text{or } mR_e\omega^2 = mg - \frac{3}{5}\,mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{5}\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{9.8}{6400 \times 10^3}} \text{ rad/ sec}$$

$= 7.826 \times 10^{-4}$ rad/sec

उदा.7 एक ग्रह (जिसका आधार पृथ्वी के आकार के बराबर तथा द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान 4 गुना है) पर 2kg द्रव्यमान की वस्तु को उर्ध्वाधर 2m ऊपर उठाने में आवश्यक ऊर्जा होगी ($g = 10 m/sec^2$ पृथ्वी तल पर)-

(A) 16 J (B) 32 J

(C) 160 J (D) 320 J

हल (C) (प्रश्नानुसार)

$g' = \dfrac{G \times 4M_p}{R^2}$ on the planet and $g = \dfrac{GM_e}{R_e^{\,2}}$ on the earth

$\therefore R_p = R_e$ and $M_p = M_e$

अब $\dfrac{g'}{g} = 4 \Rightarrow g' = 4g = 40\ m/sec^2$

(2 kg की वस्तु को 2m उठाने हेतु ऊर्जा mg'h $= 2 \times 40 \times 2 = 160$ J)

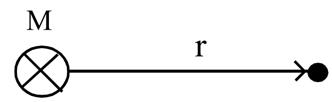
5. गुरूत्वीय क्षेत्र एवं गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

i) किसी द्रव्यमान पिण्ड के चारो ओर वह क्षेत्र जिसमें अन्य पिण्ड को रखने पर वह गुरूत्वाकर्षण बल अनुभव करे, द्रव्यमान पिण्ड का गुरूत्वीय क्षेत्र कहलाता है। जिस दूरी तक द्रव्यमान पिण्ड का क्षेत्रा रहता है वह गुरूत्वाकर्षण की सीमा कहलाती है। सैद्धान्तिक रूप से गुरूत्वार्कषण क्षेत्र अनन्त तक होता है।

ii) गुरूत्वीय क्षेत्रा में किसी बिन्दु पर रखे एंकाक द्रव्यमान पर जितना बल कार्य करता है, उसे उस बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता कहते है।

iii) गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता एक सदिश राशि है।

vi) M द्रव्यमान से r दूरी पर स्थित बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्रा की तीव्रता –



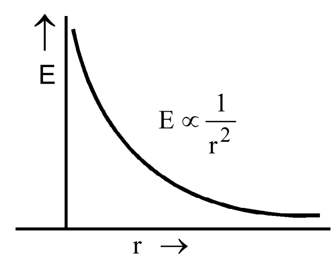
$$\vec{E} = \frac{GM_e}{r^2}\,(-\hat{r})$$

v) ईकाई–न्यूटन/किग्रा या मी/सै^{2}.

विमा–$[M^oL^1T^{-2}]$.

vi) दूरी r बढ़ने के साथ गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का मान कम होता है। $r = \infty$ दुरी पर इसका मान शून्य होता है

vii) पृथ्वी के कारण इसके केन्द्र से r दूरी पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $E = \dfrac{GM_e}{r^2} = g$.



नोट उपरोक्त कथन से स्पष्ट है कि किसी स्थान गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता उस स्थान पर गुरूत्वीय त्वरण के मान के बराबर होती है।

viii) बिन्दु द्रव्यमान के कारण गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का दूरी के साथ परिर्वतन - $E_g = \dfrac{GM}{r^2}$

ix) गुरूत्वीय क्षेत्र व गुरूत्वीय विभव में सम्बन्ध -

$$E_g = -\nabla V \qquad E_g = -\frac{dV}{dr}$$

Examples based on

गुरूत्वीय क्षेत्र की गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

उदा.8 100 kg व 10^4 kg की दो वस्तुऐं परस्पर 1 m दूरी पर स्थित हैं। 100 kg की वस्तु से किस दूरी पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी –

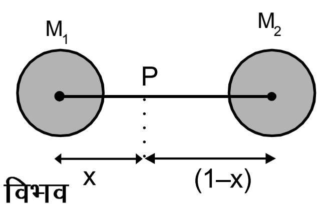
(A) $\frac{1}{9}$ m (B) $\frac{1}{10}$ m

(C) $\frac{1}{11}$ m (D) $\frac{10}{11}$ m

हल (C) माना 100 kg की वस्तु से x दूरी पर $I_g = 0$,

$$\therefore \frac{GM_1}{x^2} = \frac{GM_2}{(r-x)^2} \quad \text{or} \quad \frac{10^2}{x^2} = \frac{10^4}{(1-x)^2}$$

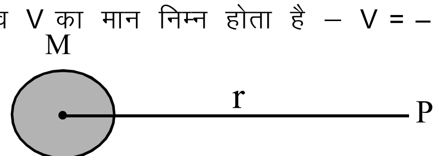
or $x = \frac{1}{11}$ M



6. गुरूत्वीय विभव

a) एकांक द्रव्यमान को अनन्त से गुरूत्वीय क्षेत्र के भीतर किसी बिन्दु तक लाने के लिए जितना कार्य करना पडता है वह उस बिन्दु पर विधुत विभव के बराबर होता है

b) बिन्दु द्रव्यमान M के कारण उससे r दूरी पर गुरूत्वीय विभव V का मान निम्न होता है – $V = -\frac{GM}{r}$



c) मात्राक–जूल / कि.ग्राम

विमा–[$M^0 L^2 T^{-2}$].

d) यह एक आदिश राशि होती है।

e) $r = \infty$, पर $V = 0$.

Examples based on

गुरूत्वीय विभव पर आधारित

उदा.9 10^2 kg व 10^3 kg द्रव्यमान की दो वस्तुये 1m दूरी पर स्थित है। उनको मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर गुरूत्वीय विभव होगा –

(A) 0 (B) –1.47 J/kg

(C) 1.47 J/kg (D) 147 × 10^{-7} J/kg

हल (D) $V_g = V_{g1} + V_{g2} = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2}$

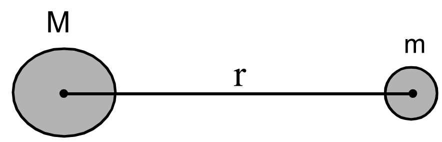
$$= -6.67 \times 10^{-11}\left[\frac{10^2}{0.5} + \frac{10^3}{0.5}\right]$$

$$= -1.47 \times 10^{-7} \text{ Joule/kg}$$

7. गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

a) किसी द्रव्यमान को अनन्त से गुरूत्वीय क्षेत्र के भीतर किसी बिन्दु तक लाने मे किया गया कार्य उस बिन्दु पर उस द्रव्यमान की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा के बराबर होता है

b) M द्रव्यमान के पिण्ड के गुरूत्वीय क्षेत्रा में m द्रव्यमान के पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा U निम्न होगी –



$$U = -\frac{GMm}{r}$$

जहाँ r, M व m के मध्य की दूरी है।

c) गुरूत्वीय क्षेत्रा में यदि किसी स्थान पर गुरूत्वीय विभव V हो तो उस स्थान पर किसी द्रव्यमान m की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा U = – mV होती है।

d) पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर किसी द्रव्यमान पिण्ड m की स्थितिज ऊर्जा –

$$U = -\frac{GM_e m}{r} \quad \text{यदि} \quad r > R_e$$

$$= -\frac{GMem(3R_e^{\,2} - r^2)}{2R_e^{\,3}} \quad \text{यदि} \quad r < R_e$$

नोट :- यदि पिण्ड पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर हो तथा R_e पृथ्वी की त्रिाज्या हो तो $r = R_e + h$

$$U = -\frac{GM_e m}{R_e + h}$$

e) इसका मान सदैव ऋणात्मक होता है। यह एक अदिश राशि होती है

f) मात्राक :– जूल या अर्ग होता है

g) अनंत पर स्थितिज ऊर्जा का मान शून्य होता है। अन्य सभी बिन्दुओ पर शून्य से कम यानि ऋणात्मक होता है।

खोखले गोले के कारण गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता तथा गुरुत्वीय विभव

a) खोखला गोला :–

माना OP = r

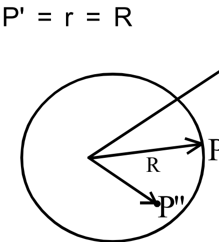
i) यदि बिन्दु P गोले से बाहर स्थित हो तो

$OP = r > R$

A) $E_{out} = -\dfrac{GM}{r^2}$ B) $V_{out} = -\dfrac{GM}{r}$

ii) यदि बिन्दु P गोले की सतह पर हो तो

$OP' = r = R$



A) $E_{सतह} = -\dfrac{GM}{R^2}$ B) $V_{सतह} = -\dfrac{GM}{R}$

iii) यदि बिन्दु P गोले के अन्दर हो तो

$OP'' = r < R$

A) $E_{in} = 0$ B) $V_{in} = -\dfrac{GM}{R}$

नोटः–

खोखले गोले के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्रा की तीव्रता शून्य होती है तथा विभव सब बिन्दुओ पर समान होता है तथा पृष्ठ के विभव के बराबर होता है।

b) ठोस गोला :–

माना OP = r

i) यदि बिन्दु P गोले के बाहर स्थित हो तो

$OP = r > R$

A) $E_{out} = -\dfrac{GM}{r^2}$ B) $V_{out} = -\dfrac{GM}{r}$

ii) यदि बिन्दु P गोले की सतह पर हो तो

$OP = r = R$

A) $E_{surface} = -\dfrac{GM}{R^2}$ B) $V_{surface} = -\dfrac{GM}{R}$

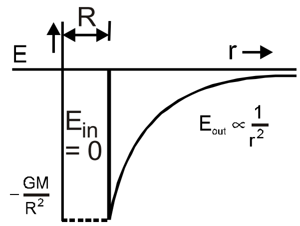
iii) यदि बिन्दु P गोले की सतह के अन्दर हो तो

$OP = r < R$

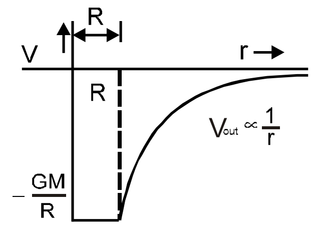
A) $E_{in} = -\dfrac{GMr}{R^3}$ B) $V_{in} = -\dfrac{GM(3R^2 - r^2)}{2R^3}$

नोट :– $V_{centre} = 1.5\ V_{surface}$

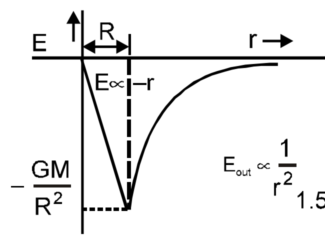
गुरूत्वीय क्षेत्रा की तीव्रता का ग्राफिय प्रस्तुतीकरण खोखले गोले के लिए



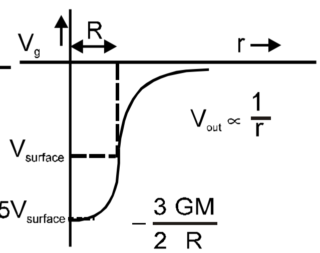
गुरूत्वीय विभव का ग्राफिय प्रस्तुतीकरण खोखले गोले के लिए



ठोस गोले के लिये



ठोस गोले के लिये



Examples based on गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा पर आधारित

उदा.10 यदि पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण g हो, तो पृथ्वी तल से पृथ्वी की त्रिज्या R के बराबर ऊँचाई तक उठाने में वस्तु की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होगी

(A) mgR (B) 2mgR

(C) $\dfrac{1}{2}$ mgR (D) $\dfrac{1}{4}$ mgR

हल पृथ्वी तल पर वस्तु की स्थितिज ऊर्जा

$u_1 = -\dfrac{GMm}{R}$

R उंचाई पर स्थितिज ऊर्जा $u_2 = -\dfrac{GMm}{(R+R)}$

स्थितिज उर्जा में वृद्धि $= -\dfrac{GMm}{2R} = \dfrac{1}{2}$ mgR

$\left[\therefore g = \dfrac{GM}{R^2}\right]$ पृथ्वी की सतह पर

8. उपग्रह

i) वे पिण्ड जो किसी ग्रह के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में ग्रह के चारो और परिक्रमण करते है, उस ग्रह के उपग्रह कहलाते है।

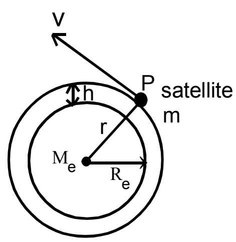
ii) उपग्रह दो प्रकार के होते है –

a) प्राकृतिक उपग्रह - जैसे चन्द्रमा, पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है।

b) कृत्रिम उपग्रह - जैसे इन्सेट, रोहिणी, आर्यभट्ट आदि।

iii) माना m द्रव्यमान का एक उपग्रह पृथ्वी की चारो और r त्रिज्या के वृत्त में गतिशील है।

उपग्रह को वृतीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।



यानि, $\frac{GM_em}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान

v = उपग्रह की चाल (कक्षीय चाल)

r = उपग्रह के पथ की त्रिाज्या = R_e + h = कक्षीय त्रिाज्या

R_e = पृथ्वी की त्रिाज्या

h = उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊँचाई

g = पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण

iv) **उपग्रह का कक्षीय वेग**

a) $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e+h}} = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e+h}}$

b) $\sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e+h}}$ ' उपरोक्त सूत्र से स्पष्ट है कि उपग्रह की चाल उसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है बल्कि उसकी पृथ्वी तल से ऊँचाई (h) पर निर्भर करती है। h (अथवा r) का मान जितना अधिक होगा, उसकी चाल उतनी कम होगी।

नोट:- केपलर का दूसरा नियम भी यही है

c) पृथ्वी की सतह के निकट के उपग्रह के लिए (h << Re),

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e}} = \sqrt{gR_e}$$

= 7.92 km/sec. ($\cong$ 8km/sec.).

e) उपग्रह का परिभ्रमण काल

i) कोई उपग्रह पृथ्वी का एक चक्कर लगाने मे जितना समय लेता है उसे उपग्रह का परिभ्रमण काल कहते है।

ii) उपग्रह का परिक्रमण काल

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_e+h)}{v}$$

iii) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR_e^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(h+R_e)^3}{gR_e^2}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^{3/2}$$

iv) उपरोक्त सूत्र से स्पष्ट है कि $T^2 \propto r^3$ (केपलर का तीसरा नियम भी यही है)

v) पृथ्वी के निकट चक्कर लगाते उपग्रह के लिए

($h << R_e$) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$ = 84.4 min.

vi) निम्न सूत्र से स्पष्ट है कि उपग्रह का आवृत काल उसकी कक्षीय त्रिाज्या (r) पर निम्नानुसार निर्भर करता है।

$$'T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} \quad \& \quad T^2 \propto r^3$$

r का मान अधिक होने पर आवर्तकाल भी अधिक होता है।

f) उपग्रह की ऊर्जा :–

जब उपग्रह r त्रिज्या की कक्षा में गति करता है तो –

i) *उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा*

P.E = $-\frac{GM_em}{r}$, जहाँ r = h

ii) *उपग्रह की गतिज ऊर्जा*

K.E = $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_em}{2r}$

iii) *उपग्रह की कुल ऊर्जा* = K.E + P.E

$$E = \frac{-GM_em}{2r}$$

iv) T.E. = $\frac{PE}{2}$ = – K.E.

v) उपग्रह की बंधन ऊर्जा = – कुल ऊर्जा = $\frac{GM_em}{2r}$ (जो कि गतिज ऊर्जा के बराबर है)

यानि उपग्रह को $\frac{GM_em}{2r}$ अतिरिक्त ऊर्जा देने पर वह पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण से मुक्त हो कर अपनी

कक्षा से पलायन कर जाता है। द्रव्यमान बढने पर बंधन ऊर्जा का मान बढ़ता है।

vi) उपग्रह को अपनी कक्षा से पलायन कराने के लिए उसकी गतिज ऊर्जा को दो गुना करना होगा –

vii) उपग्रह को कक्षा से पलायन कराने के लिए उसके वेग को $\sqrt{2}$ गुना करना होगा। यानि वेग में 41.4% की वृद्धि कर दी जावे तो उपग्रह अपनी कक्षा से पलायन कर जायेगा।

viii) उपग्रह की कुल ऊर्जा सदैव ऋणात्मक होती है।

ix) बधंन ऊर्जा = गतिज ऊर्जा = – (कुल ऊर्जा) = – स्थितिज ऊर्जा/2

Examples based on उपग्रह पर आधारित

उदा.11 एक उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर 8×10^3 km त्रिज्या के पथ पर चक्कर लगा रहा है। उपग्रह को इस कक्षा में प्रक्षेपित करने हेतु आवश्यक वेग होगा –

(A) 16 km/sec (B) 8 km/sec
(C) 3 km/sec (D) 7.08 km/sec

हल (D)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 6.4^2 \times 10^{12}}{8 \times 10^6}}$$
= 7.08 km/sec.

उदा.12 चन्द्रमा के चारों ओर एक वर्ष में 13 बार चक्कर लगाती है। यदि सूर्य पृथ्वी व पृथ्वी चन्द्रमा के दूरियों को अनुपात 392 हो, तो सूर्य व पृथ्वी के द्रव्यमानों का अनुपात होगा –

(A) 365 (B) 356
(C) 3.56×10^5 (D) 1

हल (C)

पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर घूमने का आवर्तकाल

$$T_e^2 = \frac{4\pi^2 Re^2}{GM_s}$$

चन्द्रमा का पृथ्वी के चारों और घूमने का आवर्तकाल

$$TM^2 = \frac{4\pi^2 Rm^2}{GM_e}$$

$$\therefore \left(\frac{T_e}{T_m}\right)^2 = \left(\frac{M_e}{M_s}\right)\left(\frac{R_e}{R_m}\right)^3$$

$$\therefore \frac{M_s}{M_e} = \left(\frac{T_m}{T_e}\right)^2 \left(\frac{R_e}{R_m}\right)^3 = \frac{(393)^3}{13^2} = 3.56 \times 10^5$$

उदा.13 पृथ्वी तथा सूर्य के द्रव्यमान व त्रिज्या क्रमशः M_1 M_2 तथा R_1, R_2 हो तथा उनके केन्द्र परस्पर d दूरी पर हो, तो दोनो केन्द्रो के मध्य बिन्दु से m द्रव्यमान का कण किस वेग से प्रक्षेपित किया जाय, कि वह अनन्त तक पहुँच जाये

(A) $2\sqrt{\frac{G}{d}(M_1+M_2)}$ (B) $\sqrt{\frac{G}{d}(M_1+M_2)}$
(C) $\sqrt{\frac{G}{2d}(M_1+M_2)}$ (D) $2\sqrt{\frac{G}{d}\frac{M_1}{M_2}}$

हल (A)

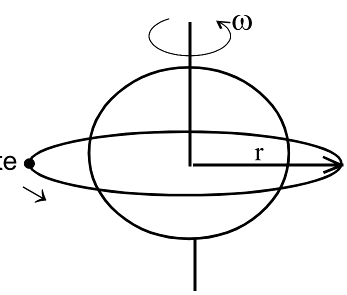
पृथ्वी व चन्द्रमा की d /2 दूरी पर विभव ऊर्जा

$$U = -\frac{GM_1m}{d} \times 2 - \frac{GM_2m}{d} \times 2$$

or $U = \frac{2Gm}{d}(M_1 + M_2)$ (Mnemonically)

$$V_e = 2\sqrt{\frac{G}{d}}(M_1 + M_2) \quad (\therefore \frac{1}{2} m V_e^2 = U)$$

9. भू–स्थिर उपग्रह :



i) ऐसा उपग्रह जो पृथ्वी पर स्थित प्रेक्षक को एक ही स्थान पर दिखाई देता हो, भू–स्थिर उपग्रह कहलाता है।

ii) भू–स्थिर उपग्रह की घूर्णन की दिशा पृथ्वी की घूर्णन की दिशा में पश्चिम से पूर्व की ओर होती है तथा इसका आवर्तकाल पृथ्वी के बराबर 24 घंटे होता है।

iii) भू–स्थिर उपग्रह केवल भूमध्य रेखा के ठीक ऊपर ही प्रक्षेपित किए जा सकते है।

iv) इस प्रकार के उपग्रह की पृथ्वी केन्द्र से ऊँचाई r = 42,000km होती है।

पृथ्वी सतह से ऊँचाई h = 36, 000 km.होती है।

v) इस प्रकार के उपग्रह का

(a) कोणीय वेग (ω) = पृथ्वी का घूर्णन वेग $= 7.1 \times 10^{-5}$ rad/sec

(b) रेखीय वेग (v) = 3.1 km/sec.

(c) परिक्रमण (T) = 24 hours.

(d) पृथ्वी तल से ऊँचाई (h) = 36,000km (लगभग)

vi) किसी t समय में भू–स्थिर उपग्रह व पृथ्वी का कोणीय विस्थापन समान होता है –

vii) यह संचार उपग्रह या पार्किंग उपग्रह भी कहलाता है।

viii) उपग्रह का कोणीय संवेग सरंक्षित रहता है।

$$J = mvr = mr\sqrt{\frac{gR_e^{\,2}}{r}} = mR_e\sqrt{gr}$$

$$= m\sqrt{GM_e r}$$

ix) उपग्रह केवल उन्ही कक्षाओं में गति कर सकता है जिसके तल का केन्द्र पृथ्वी हो।

x) यदि किसी उपग्रह से कोई पेकिट गिराया जाये तो यह पृथ्वी पर न पहुँच कर उपग्रह की कक्षा में समान चाल से चक्कर लगाता रहेगा।

xi) उपग्रह पर लगने वाला गुरूत्वाकर्षण बल उसे आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने में प्रयुक्त होता है। फलस्वरूप गुरूत्वाकर्षण बल के कारण गुरूत्वीय त्वरण g का प्रभावी मान g_{eff} = शून्य हो जाता है। फलस्वरूप प्रभावी भार $w_{eff} = 0$ हो जाता है। इस कारण उपग्रह में बैठे आदमी को भारहीनता का अनुभव होता है। भारहीनता की इस स्थिति का अनुभव यात्री को तभी होता है, जब उपग्रह का द्रव्यमान कम हो, जिससे उपग्रह के कारण यात्री पर प्रभावी गुरूत्वाकर्षण नगण्य हो।

यदि उपग्रह का स्वय का द्रव्यमान अधिक हो तो ऐसी स्थिति में भारहीनता का अनुभव नहीं होता है। जैसा कि चन्द्रमा के लिए है। चन्द्रमा पृथ्वी का उपग्रह होते हुए भी इस पर भारहीनता की स्थिति नहीं होती क्योकि इसका स्वयं का द्रव्यमान अधिक होने के कारण यह वस्तुओ को आकर्षित करता है, फलस्वरूप वस्तुओं का चन्दमा पर भार शून्य नहीं होता है।

xii) उपग्रह जब स्थायी कक्षा में चक्कर लगाता है कोई बाह्य साधन की आवश्यकता नहीं होती है।

9.1 कृत्रिम उपग्रह की कक्षा का आकार एवं उसकी प्रक्षेप गति में सम्बन्ध –

उपग्रह की कक्षा का आकार उसके वेग पर निर्भर करता है

Cases : If $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R_e + h}}$

i) यदि $v < v_0$ हो तो उपग्रह अपनी वृत्तीय कक्षा से हटकर सर्पिलाकार पथ में होता हुआ पृथ्वी पर गिर जाएगा।

ii) यदि $v = v_0$ हो तो उपग्रह वृत्ताकार कक्षा में पृथ्वी के चक्कर लगायेगा।

iii) यदि $v_0 < v < \sqrt{2}\,v_0$, हो तो उपग्रह वह पृथ्वी के चारो तरफ दीर्घ वृत्ताकार पथ में गति करेगा।

vi) यदि $v = \sqrt{2}\,v_0$, तो उपग्रह परवलयाकार पथ पर गति करता हुआ पलायन कर जायेगा।

v) यदि $v > \sqrt{2}\,v_0$, तो उपग्रह अति परवलायकार पथ पर गति करता हुआ पलायन कर जायेगा।

Examples based on भू स्थिर उपग्रह पर आधारित

उदा.14 पृथ्वी सूर्य के चारों ओर दीर्घ वृत्तकार कक्षा में परिक्रमण कर रही है। यदि $\dfrac{OA}{OB} = x$, तो B व A पर पृथ्वी की चालों का अनुपात होगा -

(A) x (B) $\sqrt{x}$

(C) x^2 (D) $x\sqrt{x}$

हल (A)

कोणीय संवेग संरक्षण से

mvr = नियत

$\Rightarrow$ vr = नियत

$v_{max} \cdot r_{min} = v_{min} \cdot r_{max}$,

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{r_{max}}{r_{min}} = x$$

उदा.15 m द्रव्यमान का एक उपग्रह r त्रिज्या के पथ पर परिक्रमण कर रहा है। उपग्रह के कोणीय संवेग J व पृथ्वी के द्रव्यमान m में सम्बन्ध होगा –

(A) $J = \sqrt{G.Mm^2r}$ (B) $J = \sqrt{GMm}$

(C) $J = \sqrt{GMmr}$ (D) $J = \sqrt{\dfrac{mr}{M}}$

हल उपग्रह का कोणीय संवेग

$$J = mvr, \text{ But } \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\therefore \quad J = m\sqrt{GMr}$$

10. पलायन वेग

i) वह न्यूनतम वेग जिससे किसी वस्तु को पृथ्वी की सतह से फैके जाने पर वह वापस लोटकर न आये यानि पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्रा से निकल जावे, पलायन वेग कहलाता है।

ii) वस्तु को पलायन कराने के लिए दी गई ऊर्जा बधंन ऊर्जा या पलायन ऊर्जा भी कहलाती है।

iii) किसी पिण्ड को पलायन कराने के लिए उसकी कुल ऊर्जा शून्य करनी होती है।

vi) पृथ्वी पर किसी कण की ऊर्जा = $\frac{-GM_em}{R_e}$

$\therefore$ पलायन ऊर्जा या बंधन ऊर्जा = + $\frac{GM_em}{R_e}$

यदि v_e वेग फैका जावे तो $\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_em}{R_e}$

$\therefore$ पृथ्वी के लिए पलायन वेग $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$

= 11.2 km/sec.

v) पलायन वेग का मान सभी वस्तुओ के लिए समान होता है तथा यह उनके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

vi) उन ग्रहों पर वायुमण्डल नहीं पाया जाता है जिन पर गैस के अणुओ का वर्ग माध्य मूल वेग, वहॉ पलायन वेग से अधिक हो।

vii) पलायन वेग का मान पिडं को फैकने की दिशा पर निर्भर नहीं करता है। बल्कि यह ग्रह के घनत्व, द्रव्यमान त्रिाज्या व ग्रह के g पर निर्भर करता है।

Examples based on **पलायन वेग पर आधारित**

उदा.16 एक अन्तरिक्ष यान पृथ्वी तल के समीप कक्षा में स्थापि किया जाता है। गुरूत्वीय प्रभाव से बाहर जाने हेतु अंतरिक्ष यान को दिया गया अतिरिक्त वेग होगा (Radius f earth = 6400 km, g = 9.8 m/sec^2)

(A) 3.285 km/sec (B) 32.85 m/sec^2
(C) 11.32 km/sec (D) 7.32 m/sec

हल (A) (अंतरिक्ष यान का कक्षीय वेग), $V_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

(यदि अंतरिक्ष यान पृथ्वी तल के अति निकट हो, तो),

r = Radius of earth = R

$\therefore V_o = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{Rg} = \sqrt{6.4\times10^6\times9.8}$

$= 7.9195 \times 10^3$ m/sec = 7.195 km/sec

(अंतरिक्ष यान का पलायन वेग)

$V_e = \sqrt{2Rg} = 7.9195\sqrt{2} = 11.2$ km/sec

(अतिरिक्त आवश्यक वेग)

= 11.2 - 7.9195 = 3.2805 km/sec.

उदा.17 पृथ्वी व चन्द्रमा की त्रिज्याओं का अनुपात 10 है। तथा पृथ्वी व चन्द्रमा पर g का अनुपात 6 है। पृथ्वी तल व चन्द्रमा के तल पर पलायन वेगों का अनुपात होगा –

(A) 10 (B) 8
(C) 4 (D) 2

हल (B)

पलायन वेग $v_e = \sqrt{2gR}$

अब (V_e) moon = $\sqrt{2gR}$

अतः (V_e) earth $= \sqrt{2\times6g\times10R}$ so $\frac{(v_e)_{earth}}{(v_e)_{moon}} = 8$

उदा.18 किसी ग्रह पर g का मान पृथ्वी पर g के मान का 10 गुना है। ग्रह तथा पृथ्वी के लिए पलायन वेग क्रमशः V_p व V_e हैं। यदि ग्रह व पृथ्वी की त्रिज्यायें समान हों तो -

(A) $V_P = 10\ V_e$ (B) $V_P = \sqrt{10}\ V_e$

(C) $V_p = \frac{V_e}{\sqrt{10}}$ (D) $V_P = \frac{V_e}{10}$

हल (B)

पलायन वेग

$= \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$

$\therefore \frac{V_p}{V_e} = \sqrt{\frac{g_p}{g_e}\times\frac{R_e}{R_p}} = \sqrt{10\times1} = \sqrt{10}$

$V_p = \sqrt{10}\ V_e$

याद रखने योग्य बिन्दु

1) पृथ्वी का द्रव्यमान एवं उसके पदार्थ का घनत्व a में सम्बन्ध –

$$g = \frac{GM_e}{R_e^{\,2}} = \frac{G\frac{4}{3}\pi R_e^3 d}{R_e^2}$$

$$\therefore \quad d = \frac{3g}{4\pi G R_e} = 5.47 \text{ gm /cm}^3 \qquad d = \text{घनत्व}$$

2) पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = \frac{gR_e^{\,2}}{G} = 6.6 \times 10^{24}$kg (approx.)

3) अन्य ग्रहो पर g का मान $\frac{g}{g_e} = \left(\frac{M}{M_e}\right)\left(\frac{R_e}{R}\right)^2$

4) दो ग्रहो के द्रव्यमानों की तुलना – $\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

जहाँ T_1 = प्रथम ग्रह का आवृत काल

T_2 = द्वितीय ग्रह का आवृत काल

r_1 = प्रथम ग्रह के कक्ष की त्रिज्या

r_2 = द्वितीय ग्रह की त्रिज्या

5) सूर्य का द्रव्यमान$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} = 19.72 \times 10^{29}$ kg

T = 365 दिन – पृथ्वी का आवृत्त काल

r = पृथ्वी की सूर्य से दूरी

6) पृथ्वी से फेंका पिण्ड चन्द्रमा तक पहुॅचे तो पहले पृथ्वी की सतह से ऊँचाई बढ़ने के साथ g_{earth} घटता है, फलस्वरूप भार $W = mg_{earth}$ घटता है। फिर जिस ऊँचाई पर $g_{earth} = g_{moon}$ हो जाता है, W = 0 इससे आगे g_{moon} प्रभावी होता है और फलस्वरूप भार w भी बढ़ता जाता है जब तक कि चन्द्रमा की सतह पर न पहुॅच जाऐ।

7) यदि m व M द्रव्यमान के कण गुरूत्वाकर्षण बल के कारण एक दूसरे की तरफ विराम अवस्था से गति करे तो जब कि बीच की इसी r होगी तो इनके पास आने का सापेक्ष वेग $\sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}}$ होगा।

8) किसी प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई

$h = \frac{v^2 R}{2gR - v^2}$ होती है।

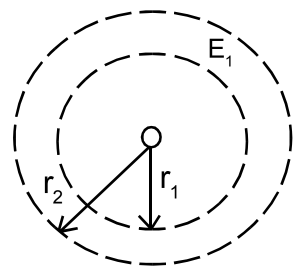
9) पृथ्वी सतह से h_1 ऊँचाई जाने पर g_1 के मान मे कभी कभी उस कमी की दुगनी होती है जो h_2 गहराई पर जाने पर g_2 के मान में होती है। $g_1 h_1 = g_2 h_2$

10) कमानी वाली घड़ी पर g का कोई फर्क नहीं पड़ता परन्तु दोलन वाली घड़ी पर g का effect होता है।

$g \downarrow T \uparrow$ घडी सुस्त हो जाती है।

$g \uparrow T \downarrow$ घडी तेज हो जाती है।

11) किसी उपग्रह की कक्षा परिवर्वतन में किया गया कार्य W = ऊर्जा में परिवर्तन



$W = E_2 - E_1;$ $\qquad W = \frac{GM_e m}{2}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$

12) यदि कोई उपग्रह उच्च कक्षा में जाता है तो स्थितिज ऊर्जा, कोणीय सवेंग बढ़ते है। तथा गतिज ऊर्जा, बंधन ऊर्जा तथा कक्षीय वेग घटते है।

हल किये गये उदाहरण

उदा.1 बृहस्पति (Jupiter) का सूर्य के परितः परिक्रमण काल, पृथ्वी के परिक्रमण काल का 12 गुना है। ग्रहीय गति वृत्तीय मानते हुए, ज्ञात करो कि बृहस्पति (Jupiter) व सूर्य के बीच दूरी पृथ्वी व सूर्य के बीच दूरी, की कितने गुना अधिक है।

(A) 5.242 (B) 4.242
(C) 3.242 (D) 2.242

हल: (A) हमें ज्ञात है कि $T^2 \propto a^3$ दिया हुआ हैं $(12\ T)^2 \propto a_1^3$ तथा $T^2 \propto a_2^3$

$$\therefore \quad \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{(12T)^2}{T^2} = 144$$

$$\text{or} \quad \frac{a_1}{a_2} = (144)^{1/3} = 5.242$$

अतः जूपिटर (Jupiter) की सूर्य से माध्य दूरी, पृथ्वी की सूर्य से दूरी की 5.242 गुना अधिक है।

उदा.2 मंगल (mars) की सूर्य से माध्य दूरी, पृथ्वी की सूर्य से दूरी की 1.524 गुना अधिक है। मंगल (mars) का सूर्य के परितः परिक्रमण काल ज्ञात करो।

(A) 2.88 earth year (B) 1.88 earth year
(C) 3.88 earth year (D) 4.88 earth year

हल: (B) हमें ज्ञात हे $T^2 \propto a^3$ या $T \propto (a)^{3/2}$

$$\therefore \quad \frac{T_{mars}}{T_{earth}} = \ = (1.524)^{3/2} = 1.88$$

क्योंकि पृथ्वी का सूर्य के परितः परिक्रमण काल 1 वर्ष है, अतः

T_{earth} = 1 वर्ष

$\therefore \quad T_{mars} = T_{earth} \times 1.88 = 1 \times 1.88$
= 1.88 earth-year.

उदा.3 बुध (Mercury) एवं मंगल (Mars) की कक्षाओं की semi-major अक्षें खगोलिय मात्रक में क्रमशः 0.387 व 1.524 है। यदि बुध का परिक्रमण काल 0.241 है तो मगल का परिक्रमण काल कितना होगा ?

(A) 1.2 years (B) 3.2 years
(C) 3.9 years (D) 1.9 years

हल: (D)

$$\frac{T_{mercury}}{T_{mars}} = \left(\frac{a_{mercury}}{a_{mars}}\right)^{3/2} = \left(\frac{0.387}{1.524}\right)^{3/2}$$

$$\therefore \quad T_{mars} = T_{mercury} \times \left(\frac{1.524}{0.387}\right)^{3/2}$$

= (0.241years) x (7.8).
= 1.9 years.

उदा.4 यदि T^2 व r^3 के बीच ग्राफ खींचा जाय, तो किसी उपग्रह के लिए ढाल होगा -

(A) $\frac{4\pi^2}{GM}$ (B) $\frac{GM}{4\pi^2}$
(C) 4p Gm (D) 0

हल:
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{u_0}\right)^2}{r^3} = \frac{(2\pi r)^2}{r^3}\ \frac{r}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

$$\therefore \quad \frac{mv_o^2}{r} = \frac{GM_m}{r^2},\ u_o^2 = \frac{GM}{r},$$

$$(T^2 - r^3 \text{ का ढाल}) = \tan\theta = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

उदा.5 चार कण जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m है। r त्रिज्या के पथ पर पारस्परिक गुरूत्वाकर्षण आकर्षण के प्रभाव में गति कर रहे हैं। प्रत्येक कण की चाल होगी -

(A) $\sqrt{\frac{Gm}{r}}(2\sqrt{2} + 1)$ (B) $\sqrt{\frac{Gm}{r}}$

(C) $\sqrt{\frac{Gm}{r}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\right)}$ (D) $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}Gm}{r}}$

हल: (C) कण '1' परिणामी बल

$$Fr = \sqrt{2}\ F + F'$$

$$\text{or} \quad Fr = \sqrt{2}\ \frac{Gm^2}{2r^2} + \frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\text{or} \quad v = \sqrt{\frac{Gm}{r}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\right)}$$

उदा.6 m द्रव्यमान के तीन कण ℓ भुजा के समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर व्यवस्थित है। प्रत्येक कण का वेग क्या हो कि वे ℓ में बिना परिवर्तन के वृत्तीय पथ पर गति करें -

(A) $\sqrt{\frac{GM}{2\ell}}$ (B) $\sqrt{\frac{GM}{\ell}}$

(C) $\sqrt{\frac{2GM}{\ell}}$ (D) $\sqrt{\frac{GM}{3\ell}}$

हल: (B) प्रत्येक कण पर परिणामी बल, इसे वृत्तीय गति हेतु अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है,

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2 \cos 60^o} = \sqrt{3}\, F,$$

$$\text{But, } r = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell \times \frac{2}{3} = \frac{\ell}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{\ell}}$$

उदा.7 चन्द्रमा के तल पर गुरूत्वीय त्वरण का मान कितना होगा, यदि चन्द्रमा की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या का 1/4 भाग हो और इसका द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 1/80 वाँ भाग हो ?

(A) g/6 (B) g/5
(C) g/7 (D) g/8

हल: (B) पृथ्वी के द्रव्यमान m_e व त्रिज्या R_e के पदों में पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

यदि चन्द्रमा का द्रव्यमान M_m व त्रिज्या R_m हो, तब चन्द्रमा के तल पर गुरूत्वीय त्वरण

समीकरण (ii) को (i) से भाग करने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{M_m}{M_e}\left(\frac{R_e}{R_m}\right)^2$$

$$= \frac{1}{80} \times \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$\therefore \quad g' = g/5.$

उदा.8. अपनी अक्ष पर पृथ्वी के घूमने की वह चाल ज्ञात कीजिए ताकि भूमध्य रेखा पर किसी मनुष्य का भार इस समय के भाग का 3/5 हो जाये। भूमध्य रेखा पर पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी मान लिजिए।

(A) 7.8×10^{-3} radian/sec.
(B) 7.8×10^{-4} radian/sec.
(C) 7.8×10^{-5} radian/sec.
(D) 7.8×10^{-2} radian/sec.

हल: (B) इस समय भूमध्य रेखा पर मनुष्य का भार लगभग वही है, जो पृथ्वी के स्थिर रहने पर होता। माना भार 3/5 रह जाने के लिए पृथ्वी की कोणीय चाल ω है। तब सूत्र $g' = g - R_e\,\omega$, अनुसार

$$\frac{3}{5} mg = mg - mR_e\omega^2.$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\left(\frac{2g}{5R_e}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 \times 9.8 m/s^2}{5 \times (6400 \times 10^3 m)}\right)}$$

$= 7.8 \times 10^{-4}$ रेडियमन / सेकण्ड

उदा.9 पृथ्वी तल से कितनी ऊँचाई पर जाने पर गुरूत्वीय त्वरण, पृथ्वी पर गुरूत्वीय त्वरण का नवाँ भाग रह जायेगा ? पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी है।

(A) 12800 km (B) 1280km
(C) 128000 km (D) 128 km

हल: (A) यदि पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण g हो तथा पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर g' हो तब

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}, \quad \frac{g'}{g} = \frac{1}{9} \text{ के लिये}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{9} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2} \text{ अथवा } 1 + \frac{h}{R_e} = 3$$

अथवा $h = 2\,R_e = 2 \times 6400 = 12800$ km.

उदा.10 यदि पृथ्वी का अर्द्धव्यास एक प्रतिशत कम हो जाये तथा द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे, तो पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण

(A) कम हो जायेगा (B) अपरिवर्तित रहेगा
(C) बढ़ जायेगा (D) इनमें से कोई नहीं

हल: (C) माना कि m द्रव्यमान की एक वस्तु पृथ्वी की सतह पर रखी हुई है (पृथ्वी का द्रव्यमान M तथा अर्द्धव्यास R है)। यदि गुरूत्वीय त्वरण g है, तो -

$$mg = G\frac{M_e m}{R^2} \quad \text{या} \quad g = \frac{GM_e}{R^2}$$

जहाँ G सार्वत्रिक गुरूत्वाकर्षण नियतांक है। जब पृथ्वी का अर्द्धव्यास 1 % कम हो जाता है अर्थात् 0.99 R हो जाता है, तो माना गुरूत्वीय त्वरण, g' हो जाता है।

$$g' = \frac{GM_e}{(0.99R)^2}$$

समीकरण (A) व (B), से हमें प्राप्त होता है

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(0.99R)^2} = \frac{1}{(0.99)^2}$$

$$\therefore \quad g' = g \times \left(\frac{1}{0.99}\right)^2 \text{ or } g' > 9$$

अर्थात् गुरूत्वीय त्वरण का मान बढ़ जाता है।

उदा.11 पृथ्वी की सतह से कितनी ऊँचाई पर गुरूत्वाकर्षण बल 10 % कम हो जाता है ? पृथ्वी का अर्द्धव्यास 6370 किमी है।

(A) 350 km. (B) 250 km.
(C) 150 km. (D) 300 km.

हल: (A) पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वाकर्षण बल

$F_1 = \text{Gm M}/R^2$ ------------(1)

H ऊँचाई पर गुरूत्वाकर्षण बल

$F_2 = \text{Gm M} (R + H)^2$ ------------(2)

समीकरण (1) को (2) से विभाजित कर सरलीकरण करने पर

$$H = R\left(\sqrt{\frac{F_1}{F_2}} - 1\right) = 350 \text{ km जहां } (F_2 = 9F_1)$$

उदा.12 पृथ्वी पर स्प्रिंग से लटका कण 1cm का खिंचाव उत्पन्न करता है। यदि कण को समान स्प्रिंग से पृथ्वी तल से 800 km ऊँचाई पर लटकाया जाये, तो स्प्रिंग में खिंचाव होगा -

(A) 0.79 cm (B) 0.1 cm
(C) $\pi/6$ rad/hr (D) $2\pi/7$rad/hr

हल: (A) स्प्रिंग की लम्बाई में खिंचाव

$$x_1 = \frac{mg}{k} = \frac{GMm}{r^2K}, \quad \therefore \quad x \propto \frac{1}{r^2},$$

$$\therefore \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$\text{or} \quad x_2 = 1 \times \left(\frac{6400}{7200}\right)^2 = 0.79 \text{ cm.}$$

उदा.13 पृथ्वी के त्वरण में कितना परिवर्तन होगा, जब चन्द्रमा सूर्यग्रहण की स्थिति से सूर्य की सीध में पृथ्वी के दूसरी तरफ आ जाय। (चन्द्रमा का द्रव्यमान = 7.36×10^{22} kg, चन्द्रमा की कक्षीय त्रिज्या 3.8×10^8 m)

(A) 6.73×10^{-2} m/s^2
(B) 6.73×10^{-3} m/s^2
(C) 6.73×10^{-4} m/s^2
(D) 6.73×10^{-5} m/s^2

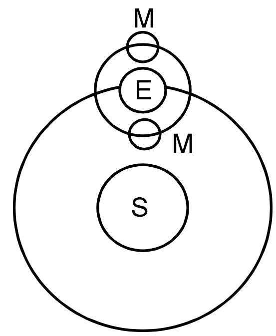
हल: (D) सूर्य ग्रहण की स्थिति में पृथ्वी पर नेट बल

$F_E = F_M + F_S$

चन्द्रग्रहण की स्थिति में पृथ्वी पर नेट बल

$F_E{}^1 = F_S - F_M$

$\therefore$ पृथ्वी के त्वरण में परिवर्तन



$$\Delta f = \frac{2GM}{R^2}$$

$$= \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 7.36 \times 10^{22}}{3.82^2 \times 10^{16}}$$

$= 6.73 \times 10^{-5}$ m/s^2

उदा.14 पृथ्वी तल से किसी पिण्ड को कितने वेग से ऊपर को उछालें कि वह 10 R_e ऊँचाई तक पहूँच जाये ? पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = 6 \times 10^{24}$ किग्रा, त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मीटर^2/ किग्रा^{2}.

(A) 10.7×10^4 m/s (B) 10.7×10^2 m/s
(C) 10.7×10^5 m/s (D) 1.07×10^4 m/s

हल: (D) माना पिण्ड का द्रव्यमान m है। पिण्ड की पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GM_e m}{R_e}$$

पृथ्वी तल से 10 R_e ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा

$$U' = -\frac{GM_e m}{(R_e + 10R_e)}$$

$\therefore$ गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$U' - U = -\frac{GM_e m}{11R_e} - \left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

$$= \frac{10}{11}\frac{GM_e m}{R_e}$$

पह वृद्धि पिण्ड को उछालते समय दी गई गतिज ऊर्जा से प्राप्त होगी। अतः यदि पिण्ड को ν वेग से उछालें, तब

$$\frac{1}{2}m\nu^2 = \frac{10}{11}\frac{GM_e m}{R_e} \text{ अथवा } \nu = \sqrt{\frac{20GM}{11R_e}}$$

दिये गये मान रखने पर

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{20 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (6 \times 10^{24})}{11 \times (6.4 \times 10^6)}\right)}$$

$= 1.07 \times 10^4$ मीटर / सेकण्ड।

उदा.15 पृथ्वी की त्रिज्या R_e तथा पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण g है। द्रव्यमान m के पिंड को पृथ्वी तल से h ऊँचाई तक ऊपर उठाने में आवश्यक कार्य की गणना कीजिए।

(A) $\dfrac{mgh}{\left(1-\dfrac{h}{R_e}\right)}$ (B) $\dfrac{mgh}{\left(1+\dfrac{h}{R_e}\right)^2}$

(C) $\dfrac{mgh}{\left(1+\dfrac{h}{R_e}\right)}$ (D) $\dfrac{mg}{\left(1+\dfrac{h}{R_e}\right)}$

हल: (C) माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e है। तब किया गया कार्य

$$W = GM_e\, m\left[\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_e+h}\right] = \frac{GM_e mh}{R_e(R_e+h)}$$

$$= \frac{gR_e mh}{R_e(R_e+h)} \quad [\because GM_e = gR_e^2]$$

$$= \frac{mgh}{\left(1+\dfrac{h}{R_e}\right)}$$

उदा.16 यदि कोई उपग्रह अपनी कक्षा में यकायक रोक कर पृथ्वी पर मुक्त रूप से गिरने दिया जाय तो, वह पृथ्वी पर किस चाल से टकरायेगा -

(A) 7.919 m/sec (B) 7.919 km/sec
(C) 11.2 m/sec (D) 11.2 km/sec

हल: (B) (ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त से)

(h = ऊँचाई पर ऊर्जा)

$$0 - \frac{GM_m}{R+h} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_m}{R}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_m}{R} - \frac{GM_m}{R+h}$$

$$= \frac{GM_m}{R} - \frac{GM_m}{2R}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{R^2g}{R}} = \sqrt{Rg}$$

$$= \sqrt{6400\times10^3\times9.8} = 7.919 \text{ km/sec.}$$

उदा.17 एक प्रक्षेप्य पृथ्वी तल से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर KV_e वेग से प्रक्षेपित किया जाता है। जहाँ V_e पलायन वेग है तथा K < 1, वायु का प्रतिरोध नगण्य है, पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की महत्तम ऊँचाई होगी -

(A) $\dfrac{R}{1-K^2}$ (B) $\dfrac{R}{K^2}$

(C) $\dfrac{1-K^2}{K^2}$ (D) $\dfrac{K^2}{R}$

हल: (A) यदि वस्तु पृथ्वी तल से v वेग से h ऊँचाई तक प्रक्षेपित की जायेंगे ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त से -

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgh}{1+h/R}$$

दिया है $v = Kve = K\sqrt{2gR}$ and $h = r - R$

$$\text{अतः}\quad \frac{1}{2}mK^2\, 2gR = \frac{mg(r-R)}{1+\dfrac{r-R}{R}}$$

$$\text{or}\qquad r = \frac{R}{1-k^2}$$

उदा.18 एक उपग्रह पृथ्वी के समीप एक कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। पृथ्वी की त्रिज्या को 6.4×10^6 मीटर मानते हुये, उपग्रह की कक्षीय चाल तथा परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए। ($g = 9.8$ मीटर/सेकण्ड^2)

(A) 7.2 km/sec., 84.6 minutes
(B) 2.7 km/sec., 8.6 minutes
(C) .72 km/sec., 84.6 minutes
(D) 7.2 km/sec., 8.6 minutes

हल: (A) कक्षीय चाल, $v_0 = \sqrt{gR_e} = \sqrt{9.8\times(6.4\times10^6)}$

$= 7.2 \times 10^3$ m/s

= 7.2 किलो मीटर/सेकण्ड

परिक्रमण काल, $T = 2\pi\sqrt{R/g}$

$= 2 \times 3.14\sqrt{(6.4\times10^6)/9.8}$

= 5075 सेकण्ड = 84.6 मिनट

उदा.19 यदि किसी कृत्रिम उपग्रह का पृथ्वी के ठीक ऊपर चक्कर लगाने का परिक्रमण काल T है तथा पृथ्वी का घनत्व ρ है, तो ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ मीटर^3/किग्रा. सेकण्ड^2)

(A) ρT^2 सार्वत्रिाक नियतांक है।

(B) ρT^2 समय के साथ परिवर्तित होता है।

(C) $\rho T^2 = \dfrac{3\pi}{G}$

(D) $\rho T^2 = 3\pi \times G$

हल: (A), (C)

यदि किसी उपग्रह का पृथ्वी के चारों ओर का परिक्रमण-काल T है, तब

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_e + h)^3}{GM_e}$$

जहाँ h उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊँचाई है।

$$\therefore \quad M_e = \frac{4\pi^2(R_e + h)^3}{GT^2}$$

उपग्रह, पृथ्वी के ठीक ऊपर चक्कर लगा रहा है, अतः h, R_e की तुलना में उपेक्षणीय है।

$$\therefore \quad M_e = \frac{4\pi^2 R_e^3}{GT^2}$$

परन्तु $M_e = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho$ जहाँ ρ पृथ्वी का घनत्व हैं इस प्रकार

$$\frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho = \frac{4\pi^2 R_e^3}{GT^2}$$

अथवा $\rho T^2 = \frac{3\pi}{G}$.

जो कि सर्वाधिक नियताँक है। इसका मान ज्ञात करने के लिये

$$\rho T^2 = \frac{3\pi}{G}.$$

$$\frac{3 \times 3.14}{6.67 \times 10^{-11}(m^3/kg - s^2)}$$

$= 1.41 \times 10^{11}$ किग्रा–सेकण्ड^2/मीटर^3.

उदा.20 100 किग्रा का एक पिण्ड अनन्त से पृथ्वी पर गिरता है। पृथ्वी पर पहुँचने पर पिण्ड की ऊर्जा कितनी होगी ? पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी तथा g = 9.8 मीटर/सेकण्ड^2 है। वायु घर्षण उपेक्षणीय है।

(A) 6.27×10^9 J (B) 6.27×10^{10} J

(C) 6.27×10^{10} J (D) 6.27×10^7 J

हल: (A) यदि किसी पिण्ड को पृथ्वी तल से पलायन वेग v_e देकर भेजें तो वह अनन्त तक चला जायेगा। अतः अनन्त से गिरने वाले पिण्ड का पृथ्वी पर वेग v_e होगा। पृथ्वी पर पलायन वेग

$$v_e = \sqrt{gR_e} = \sqrt{2 \times (9.8 m/s^2) \times (6400 \times 10^3 m)}$$

$= 1.2 \times 10\ 10^4$ मीटर/सेकण्ड

$= 11.2$ किमी/सेकण्ड।

पिण्ड द्वारा अर्जित गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2} m v_e^2$$

$= \frac{1}{2} \times 100$ किग्रा $\times (11.2 \times 10^3$ मीटर/सेकण्ड$)^2$

$= 6.27 \times 10^9$ जूल।

उदा.21 एक कृत्रिम उपग्रह को पृथ्वी के विषुवत् तल में स्थापित करना है। विषुवत् रेखा पर स्थित एक प्रेक्षक को यह उपग्रह पूरब की ओर चलता हुआ प्रतीत होना चाहिए तथा एक दिन में एक चक्कर पूरा करना चाहिए। पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की दूरी ज्ञात करो। पृथ्वी का द्रव्यमान है 6.0×10^{24} किग्रा तथा इसका कोणीय वेग है 7.30×10^{-5} रेडियन/सेकण्ड)

(A) 2.66×10^3 m. (B) 2.66×10^5 m.

(C) 2.66×10^6 m. (D) 2.66×10^7 m.

हल: (D) हमें ज्ञात है

$$\frac{GMm}{r^2} = m\,\omega^2 r \quad \text{or} \quad \frac{GM}{r^2} = \omega^2 r.$$

$$\therefore \quad r^3 = \frac{GM}{\omega^2}$$

जहाँ ω उपग्रह का कोणीय वेग है। वर्तमान स्थिति में, $\omega = 2\omega_0$,

जहाँ ω_0 पृथ्वी का कोणीय वेग है।

$\therefore \quad \omega = 2 \times 7.3 \times 10^{-5}$ रेडियन/सेकण्ड

$G = 6.673 \times 10^{-11}\ n\text{-}m^2/kg^2$

$M = 6.00 \times 10^{24}$ kg.

ये मान समीकरण (A) में स्थापित करने पर

$$r^3 = \frac{(6.673 \times 10^{-11})(6.00 \times 10^{24})}{(2 \times 7.3 \times 10^{-5})^2}$$

हल करने पर $r = 2.66 \times 10^7$ मीटर

उदा.22 दो उपग्रह P व Q जिनके द्रव्यमान समान हैं। पृथ्वी के निकट भूमध्य रेखीय तल में चक्कर लगा रहे हैं। उपग्रह P पृथ्वी के घूर्णन दिशा में, जबकि Q विपरीत दिशा में घूम रहा है। पृथ्वी से जुड़े निकाय के सापेक्ष इनकी गतिज ऊर्जाओं का अनुपात होगा

(A) $\left(\frac{8363}{7437}\right)^2$ (B) $\left(\frac{7437}{8363}\right)^2$

(C) $\left(\frac{8363}{7437}\right)$ (D) $\left(\frac{7437}{8363}\right)$

हल: (A) $\frac{E_{KQ}}{E_{KP}} = \frac{V_Q^2}{V_P^2}$ पृथ्वी का रेखीय वेग

$$v_e = \frac{2\pi Re}{T_e} = \frac{2.28 \times 6.4 \times 10^6}{24 \times 3600} = 463 \text{ m/s}$$

कक्षीय वेग $V_0 = \sqrt{R_e g} = 7.9 \times 10^3$ m/s

प्रश्नानुसार

$V_P = V_0 + V_e = 7900 - 463 = 7437$ m/s

$V_Q = V_0 + V_e = 7900 + 463 = 8363$ m/s

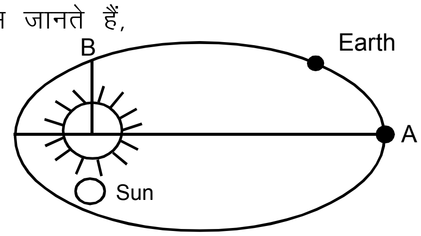
$$\therefore \quad \frac{E_{KQ}}{E_{KP}} = \left(\frac{8363}{7437}\right)^2$$

उदा.23 यदि पृथ्वी की माध्य त्रिज्या 1.5×10^8 km तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 हो, तो सूर्य का द्रव्यमान होगा-

(A) 12×10^{10} kg (B) 3×10^{10} kg

(C) 2×10^{30} kg (D) 3×10^{30} kg

हल: (C) हम जानते हैं,



$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

$$\text{or} \quad M = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

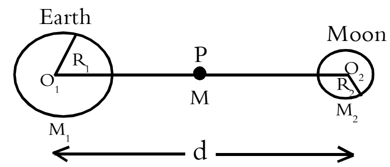
(As T = 1 year = 3.15×10^7 sec)

उदा.24 पृथ्वी एवं चन्द्रमा के द्रव्यमान एवं त्रिज्यायें क्रमशः M_1, M_2 व R_1, R_2 हैं तथा उनके केन्द्र d दूरी पर है। वह न्यूनतम चाल जिससे किसी m द्रव्यमान के कण को निकाय के मध्य बिन्दु से प्रक्षेपित किया जाये ताकि यह अनन्त पर चला जाये, होगी

(A) $2\sqrt{\frac{G}{d}(M_1+M_2)}$ (B) $\sqrt{\frac{G}{d}(M_1+M_2)}$

(C) $\sqrt{\frac{G}{2d}(M_1+M_2)}$ (D) $\sqrt{\frac{G}{d}\frac{M_1}{M_2}}$

हल: (A) पृथ्वी व चन्द्रमा के केन्द्र से d/2 दूरी पर स्थितिज ऊर्जा



$$U = -2\frac{GM_1 m}{d} - 2\frac{GM_2 m}{d}$$

$$\text{or} \quad U = -\frac{2Gm}{d}(M_1 + M_2)\text{(Numerically)}$$

$$\frac{1}{2} m V_e^2 = U$$

$$\Rightarrow \quad V_e = 2\sqrt{\frac{G}{d}(M_1+M_2)}$$