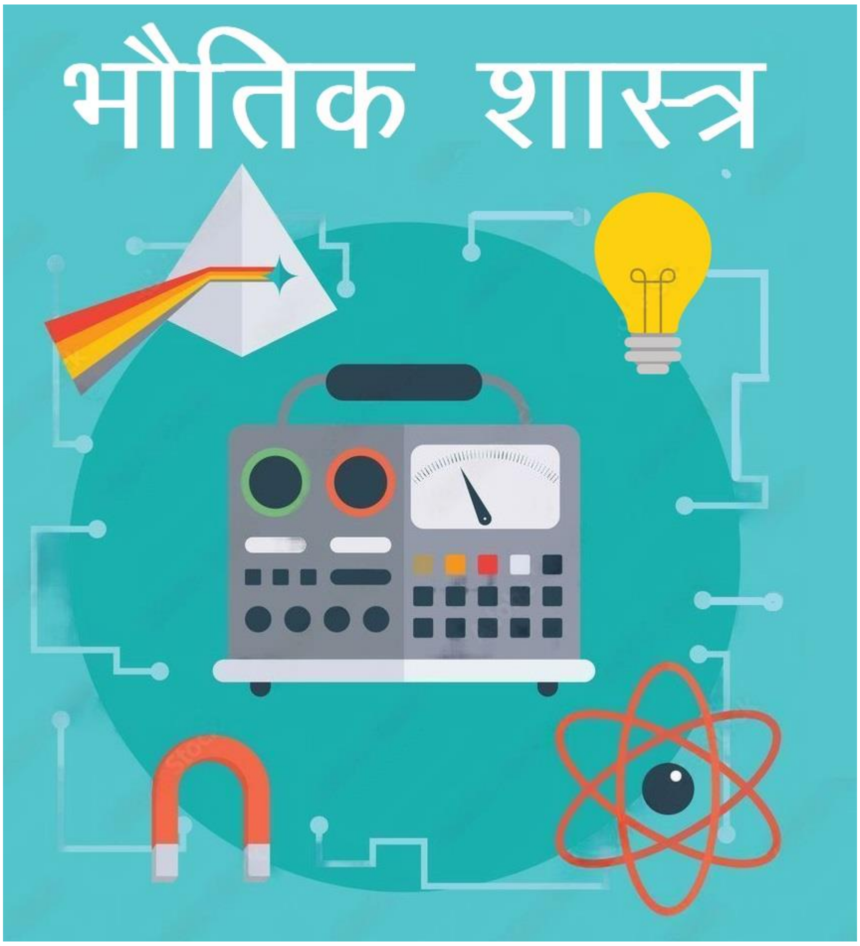
भौतिकी

अध्याय-7: कणों के निकाय तथा घूर्णी गति



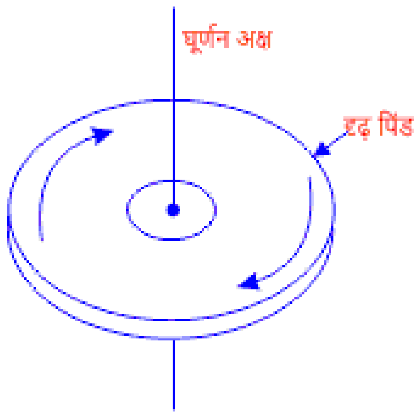
कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

दृढ़ पिंड

जब किसी पिंड पर बाह्य बल लगाने से यदि पिंड के कणों में कोई विस्थापन नहीं होता है तो ऐसे पिंड को दृढ़ पिंड कहते हैं। दृढ़ पिंड ठोस पदार्थ ही होते हैं।
जैसे पत्थर आदि।

घूर्णन गति

जब कोई दृढ़ पिंड किसी अक्ष के परितः घूमता है तू पिंड की गति को घूर्णन गति कहते हैं एवं इसके अक्ष को घूर्णन अक्ष कहते हैं।
घूर्णन गति में पिंड का प्रत्येक कण एक वृत्तीय गति करता है।
उदाहरण लट्टू की गति, पृथ्वी का चक्रण, छत के पंखे की गति आदि।



घूर्णन गति करता पिंड

घूर्णन गति के समीकरण

घूर्णन गति के समीकरण भी गति के समीकरण की तरह है।बस यहां कुछ बदलाव होते हैं जैसे-

विस्थापन	s	θ
प्रारंभिक वेग	u	ω
अंतिम वेग	v	ω_0

त्वरण	a	α

1. घूर्णन गति का प्रथम समीकरण

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

2. घूर्णन गति का द्वितीय समीकरण

$$\boxed{\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

3. घूर्णन गति का तृतीय समीकरण

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta}$$

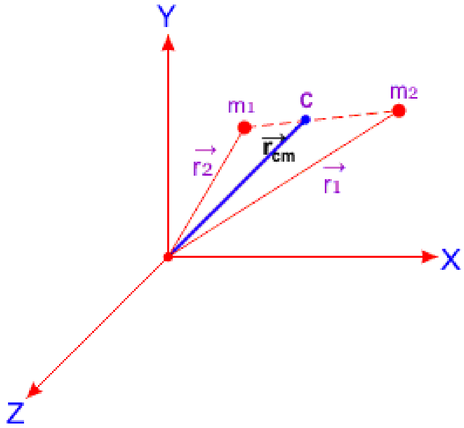
द्रव्यमान केंद्र

जब निकाय किसी बाह्य बल के अंतर्गत गति करता है तब उसका कोई बिंदु इस प्रकार गति करता है कि जैसे निकाय का समस्त द्रव्यमान इस बिंदु पर केंद्रित हो तथा बाह्य बल भी इसी बिंदु पर आरोपित हो, तो इस बिंदु को निकाय का द्रव्यमान केंद्र (centre of mass) कहते हैं। इसे C द्वारा प्रदर्शित किया जाता है यही द्रव्यमान केंद्र की परिभाषा है।

NCERT book में संहति केंद्र प्रयोग किया गया है संहति केंद्र और द्रव्यमान केंद्र एक ही चीज है। इसे दोनों में से किसी भी नाम से लिख सकते हैं।

दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केंद्र

माना दो कण जिनका द्रव्यमान m_1 व m_2 है जिन्हें चित्र में बिंदुओं से दर्शाया गया हैं। यह दोनों कण एक ही निकाय में स्थित है।



मूलबिंदु O के सापेक्ष कणों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}$ व $\vec{r_2}$ हैं यदि निकाय का द्रव्यमान केंद्र C है तो इसका स्थिति सदिश निम्न होगा।

$$\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}}$$

cm का मतलब centre of mass (द्रव्यमान केंद्र) है।

यदि निकाय में दो कण की जगह अनेक कण हैं तो निकाय का स्थिति सदिश निम्न होगा।

$$\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm}$$

जहां M निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान तथा dm सूक्ष्म अवयव का द्रव्यमान है एवं $\vec{r}$ इसका स्थिति सदिश है।

द्रव्यमान केंद्र की गति

माना कोई निकाय जिसमें n कण हैं। जिसके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3...... m_n हैं यदि मूलबिंदु के सापेक्ष इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3} \ldots\ldots \vec{r_n}$ हैं

तब निकाय के द्रव्यमान केंद्र का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2}+\ldots\ldots m_n\overrightarrow{r_n}}{m_1+m_2+\ldots\ldots m_n}$$

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M}(m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + \ldots\ldots .m_n\overrightarrow{r_n})$$

जहां M निकाय का कुल द्रव्यमान है

कुल द्रव्यमान का समय के साथ अवकलन करने पर

$$\frac{\overrightarrow{r_{cm}}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\frac{\overrightarrow{r_1}}{dt} + m_2\frac{\overrightarrow{r_2}}{dt} + \ldots\ldots .m_n\frac{\overrightarrow{r_n}}{dt})$$

चूंकि वेग = दूरी/समय होता है तब

$$\boxed{\overrightarrow{v_cm} = \frac{1}{M}(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \ldots\ldots .m_n\overrightarrow{v_n})}$$

जहां $\overrightarrow{v_cm}$ द्रव्यमान केंद्र का कुल वेग है।

यदि निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल $\overrightarrow{F_{ext}}$ हो तब

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ext}} = M\overrightarrow{a_{cm}}}$$

जहां $\overrightarrow{a_{cm}}$ निकाय के द्रव्यमान केंद्र का त्वरण है।

विलगित निकाय

वह निकाय जिस पर कार्यरत समस्त बाह्य बल शून्य हो, तो उस निकाय को विलगित निकाय (isolated system) कहते हैं।

इसमें निकाय के द्रव्यमान केंद्र का वेग $\overrightarrow{v_{cm}}$ नियत रहता है चूंकि $\overrightarrow{F_{ext}}$ = 0

तब $\overrightarrow{a_{cm}}$ = 0

अत: $\boxed{\overrightarrow{v_{cm}} = \text{नियतांक}}$

कोणीय वेग

जब कोई कण किसी वृत्त की परिधि पर घूमता है तो उसका कोणीय विस्थापन समय के साथ परिवर्तित होता जाता है। अर्थात वृत्तीय गति करते हुए किसी कण के कोणीय विस्थापन की समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय वेग (angular velocity) कहते हैं। इसे ω (ओमेगा) से प्रदर्शित किया जाता है।

माना कोई कण जिसका Δt सूक्ष्म समयांतराल में, कोणीय विस्थापन Δθ है तब कण का कोणीय वेग

$$\boxed{\omega = \frac{\text{कोणीय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

यह कोणीय वेग का सूत्र है इसका मात्रक रेडियन/सेकंड होता है। तथा कोणीय वेग की विमा $[M^0L^0T^{-1}]$ होती है।

चूंकि हम जानते हैं कि कोई कण एक वृत्तीय चक्कर पूरा करने में 360° यानी 2π घूम जाता है। एवं इस पूर्ण चक्र में लगा समय कण का परिक्रमण काल (T) कहलाता है। तो कण का औसत कोणीय वेग

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

या $\boxed{\omega = 2\pi n}$

जहां n कण की आवृत्ति है।

रेखीय वेग

जब कोई कण रेखीय गति करता है तो उसका रेखीय विस्थापन समय के साथ परिवर्तित होता जाता है। अर्थात रेखीय गति करते हुए किसी कण के रेखीय विस्थापन की समय के साथ परिवर्तन की दर को रेखीय वेग (linear velocity) कहते हैं।

माना कोई कण जिसका Δt सूक्ष्म समयांतराल में, रेखीय विस्थापन Δs है तब कण का रेखीय वेग

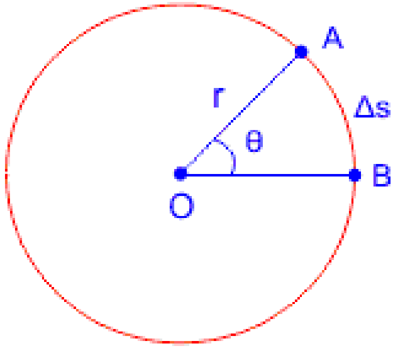
$$v = \frac{\text{रेखीय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}}$$

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

यह रेखीय वेग का सूत्र है इसका मात्रक मीटर/सेकंड होता है। यह एक सदिश राशि है।

कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में संबंध

यदि कोई कण एक निश्चित त्रिज्या के वृत्त की परिधि पर एकसमान चाल से चलता है माना कण Δt समयांतराल में वृत्त की परिधि पर Δs दूरी घूम जाता है। यदि कण का कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ हो तो



कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में संबंध

कण का कोणीय वेग

$\omega = lim \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

जहां lim $\Delta t \rightarrow 0$ है

$\omega = lim \frac{1}{\Delta t} \times \Delta\theta$

$\omega = lim \frac{1}{\Delta t} \times \frac{\Delta s}{r}$ (चूंकि $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$)

$\omega = lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \times \frac{1}{r}$

$\omega = v \times \frac{1}{r}$ (चूंकि $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = v)

$\omega = \frac{v}{r}$

$\boxed{v = r\omega}$

रेखीय वेग = त्रिज्या × कोणीय वेग

यह कोणीय वेग और रेखीय वेग में संबंध का सूत्र है। (relation between angular velocity and linear velocity)

सूत्र से स्पष्ट है कि कण केंद्र से जितनी अधिक दूरी पर होगा, उसका रेखीय वेग उतना ही अधिक होगा।

कोणीय संवेग संरक्षण का नियम (सिद्धांत)

यदि किसी अक्ष के परितः घूमते हुए पिंड पर कोई बाह्य बल आघूर्ण का आरोपित न हो, तो उस पिंड का कोणीय संवेग नियत रहते हैं इसे कोणीय संवेग संरक्षण का नियम कहते हैं। अर्थात

$\boxed{J = I\omega = \text{नियतांक}}$

उत्पत्ति -

कोणीय संवेग तथा बल आघूर्ण के संबंध से हमने पढ़ा है कि घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिंड के कोणीय संवेग परिवर्तन की दर, उस पिंड पर आरोपित बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होती है अतः

$\tau = \frac{dJ}{dt}$

यदि बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो तो $\tau = 0$

$\frac{dJ}{dt} = 0$

तथा $dJ = 0$ (चूंकि समय शून्य नहीं हो सकता है)

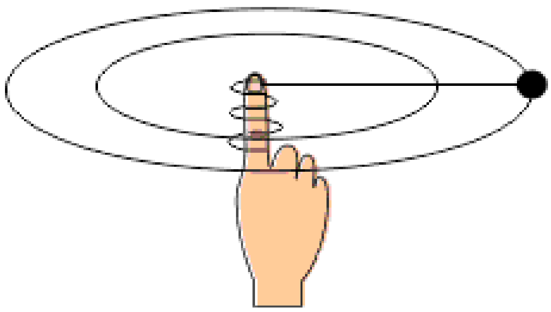
अर्थात् $\boxed{J = \text{नियतांक}}$

यह कौन है संवेग संरक्षण का नियम (सिद्धांत) है।

उदाहरण

1. यदि हम किसी हल्के पिंड को धागे से बांधकर एवं धागे को हाथ से इस प्रकार क्षैतिज तल में घुमाया जाए, कि धागा उंगली पर लिपट रहा हो। जैसे चित्र में दिखाया गया है। तब इस स्थिति में पिंड का कोणीय वेग (ω) बढ़ता जाता है। क्योंकि धागा लिपटते समय पिंड तथा उंगली के बीच की दूरी कम होती जाती है। इससे पिंड अधिक तेजी से घूमने लगता है इसलिए पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I) घटता जाता है।

   अतः संवेग संरक्षण के नियम से पिंड का कोणीय वेग भी बढ़ता जाता है।



कोणीय संवेग संरक्षण का नियम

2. जब कोई तेराक (गोताखोर) ऊंचाई से जल में कूदता है तो वह अपने शरीर को सीधा रखने की बजाय अपने हाथ पैरों को सिकोड़ लेता है जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) कम हो जाता है। चूंकि कोणीय संवेग ($I\omega$) का मान नियत रहता है। अतः जड़त्व आघूर्ण के घटने से कोणीय वेग (ω) का मान बढ़ जाता है। तथा जल में गिरने के कुछ समय पहले ही वह गोताखोर अपने शरीर को सीधा कर लेता है।

3. डांसिंग बोर्ड पर स्केट्स (पहिये लगे जूते) पहनकर नाचने वाला व्यक्ति(या लड़की) नाचते समय अपने हाथों को सिकोड़ लेता है जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) का मान कम हो जाता है। परिणामस्वरूप कोणीय वेग बढ़ जाता है। जिस कारण पर व्यक्ति(या लड़की) तेजी से घूमने लगता है।

कोणीय त्वरण

घूर्णन अथवा कोणीय गति में कोणीय वेग के समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण (angular acceleration) कहते हैं। इसे α (अल्फा) से प्रदर्शित करते हैं।

माना घूर्णन गति करते हुए पिंड पर किसी समय t_1 पर कोणीय वेग ω_1 तथा समय t_2 पर कोणीय वेग ω_2 है तो कोणीय त्वरण की परिभाषा से

$$\text{कोणीय त्वरण } \alpha = \frac{\text{कोणीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयांतराल}}$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}}$$

यह कोणीय त्वरण का सूत्र है। इसका मात्रक रेडियन/सेकंड^2 होता है एवं विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-2}]$ होता है। कोणीय त्वरण एक सदिश राशि है।

रेखीय त्वरण

रेखीय गति में रेखीय वेग के समय के साथ परिवर्तन की दर को रेखीय त्वरण (linear acceleration) कहते हैं। इसे a से प्रदर्शित करते हैं। तो

$$\text{रेखीय त्वरण } a = \frac{\text{रेखीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयांतराल}}$$

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

यह रेखीय त्वरण का सूत्र है। इसका मात्रक मीटर/सेकंड^2 होता है यह एक सदिश राशि है। रेखीय त्वरण का विमीय सूत्र $[M^0LT^{-2}]$ होता है।

कोणीय त्वरण और रेखीय त्वरण में संबंध

माना कोई पिंड किसी अक्ष के परितः घूम रहा है तो उसका कोणीय त्वरण

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ समी.

यदि पिंड का किसी क्षण रेखीय वेग v है तो

$v = r\omega$

या $\omega = \frac{v}{r}$

अब ω का मान समी. में रखने पर

$\alpha = \frac{\Delta v/r}{\Delta t}$

$\alpha = \frac{1}{r}\frac{\Delta v}{\Delta t}$

चूंकि रेखीय त्वरण $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ है तब

$\alpha = \frac{1}{r} \times a$

$\boxed{a = r \times \alpha}$

रेखीय त्वरण = त्रिज्या × कोणीय त्वरण

सदिश रूप में

$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{\alpha}$

अर्थात पिंड के किसी कण का रेखीय त्वरण, पिंड के कोणीय त्वरण तथा उस कण की घूर्णन अक्ष से दूरी (त्रिज्या) के गुणनफल के बराबर होता है। यही कोणीय त्वरण तथा रेखीय त्वरण में संबंध (relation between angular acceleration and linear acceleration) है।

बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में संबंध

बल आघूर्ण - जब किसी पिंड पर लगा कोई बाह्य बल जो उस पिंड को किसी अक्ष के परितः घूर्णन करने की प्रवृत्ति रखता हो तो उस बाह्य बल को बल आघूर्ण कहते हैं।

$\tau = r \times F$

कोणीय त्वरण - घूर्णन गति में कोणीय वेग की समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं।

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में संबंध

माना कोई पिंड स्थिर बिंदु O के परितः घूम रहा है पिंड का कोणीय त्वरण α है तो पिंड सभी कणों का कोणीय त्वरण α ही होगा। जबकि रेखीय त्वरण भिन्न-भिन्न होंगे। माना पिंड के किसी एक कण का द्रव्यमान m_1 तथा घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 है तो

इस कण कर रेखीय त्वरण

$a_1 = r_1\alpha$

इस कण पर लगने वाला बल F_1 हो तो

$F_1 = m_1a_1$

a_1 का मान रखने पर बल

$F_1 = m_1r_1\alpha$

इसका बल आघूर्ण

$\tau_1 = F_1r_1$

F_1 का मान रखने पर बल आघूर्ण

$\tau_1 = m_1r_1\alpha \times r_1$

$\tau_1 = m_1r_1\alpha \times r_1$

$\tau_1 = m_1r_1^2\alpha$

यह बल आघूर्ण पिंड के किसी एक कण का है इसी प्रकार अन्य कणों के बल आघूर्ण निम्न होंगे-

$m_2r_2^2\alpha, m_3r_3^2\alpha, \ldots\ldots\ldots\ldots$ ।

अतः पूरे पिंड का बल आघूर्ण

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tau = m_1r_1^2\alpha + m_2r_2^2\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tau = \alpha(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$\tau = \alpha(\Sigma mr^2)$

$\boxed{\tau = I\alpha}$

बल आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय त्वरण

यही बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में संबंध का सूत्र है यदि $\alpha = 1$ तब

$\boxed{\tau = I}$

अर्थात् किसी पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, उस बल आघूर्ण के बराबर होता है जो पिंड में अक्ष के परितः एकांक कोणीय त्वरण उत्पन्न कर दे।

जड़त्व आघूर्ण

सरल रेखीय गति में न्यूटन के प्रथम नियमानुसार, यदि कोई वस्तु विराम की अवस्था में है तो वह विरामावस्था में ही रहेगी अथवा यदि कोई वस्तु एकसमान चाल से सीधी रेखा में चल रही है तो वह चलती ही रहेगी। जब तक उस पर कोई बाह्य बल न लगाया जाए, इस बाह्य बल के कारण वस्तु अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है वस्तु के इस गुण को जड़त्व कहते हैं।

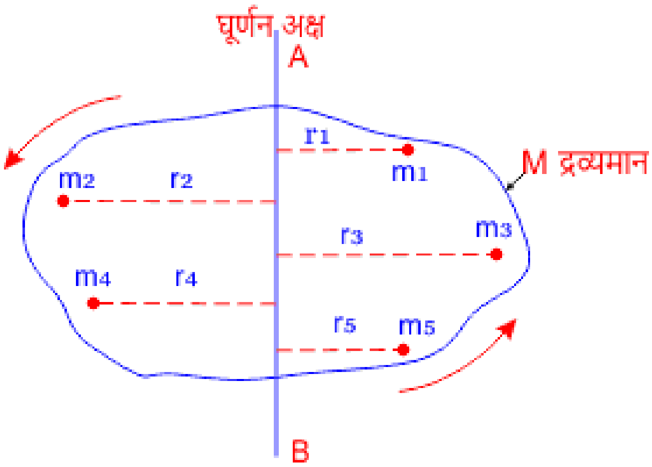
इसी प्रकार घूर्णन गति में कोई पिंड किसी अक्ष के परितः किसी कोणीय वेग से घूर्णन करता है तो उसमें अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करने का एक गुण होता है। जिसके कारण पिंड अपनी प्रारंभिक अवस्था में बने रहने का प्रयास करता है पिंड के इस गुण को जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) कहते हैं। इसे I से प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि रेखीय गति में जो महत्व जड़त्व का है वही महत्व कोणीय (घूर्णन) गति में जड़त्व आघूर्ण का है। दोनों में अंतर सिर्फ यह है कि जड़त्व वस्तु के केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। जबकि जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान के साथ उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी पर भी निर्भर करता है।

जड़त्व आघूर्ण का सूत्र

पिंड के किसी कण का जड़त्व आघूर्ण उस कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात

$$\boxed{I = mr^2}$$



जड़त्व आघूर्ण

माना M द्रव्यमान का एक पिंड अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। माना पिंड छोटे-छोटे कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3, ... हैं एवं इनकी घूर्णन अक्ष से दूरी क्रमशः r_1, r_2, r_3, ... हैं तो

पहले कण का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = m_1r_1^2$

दूसरे कण का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = m_2r_2^2$

तीसरे कण का जड़त्व आघूर्ण $I_3 = m_3r_3^2$

इसी प्रकार आगे भी ....

यदि पूरे पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I है तो

$I = I_1 + I_2 + I_3 + ...$

$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + ...$

$$\boxed{I = \Sigma mr^2}$$

अतः इस समीकरण द्वारा स्पष्ट होता है कि किसी पिंड का किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, पिंड के प्रत्येक कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।

जड़त्व आघूर्ण का SI मात्रक किग्रा-मीटर^2 होता है। एवं विमीय सूत्र $[ML^2T^0]$ तथा इसका C.G.S. पद्धति में मात्रक ग्राम-सेमी^{2} होता है। जड़त्व आघूर्ण न तो सदिश राशि है और न ही अदिश। यह एक प्रदिश (टेंसर) राशि है टेंसर राशि का मान अलग-अलग दिशाओं के लिए अलग-अलग होता है।

जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व

किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण उसकी घूर्णन गति में वही कार्य करता है जो उसका द्रव्यमान रेखीय गति में करता है। क्योंकि किसी पिंड का द्रव्यमान ही उसके जड़त्व की माप है।

अन्य अंतर किसी पिंड का जड़त्व केवल उसके द्रव्यमान पर निर्भर करता है जबकि पिंड का जड़त्व आघूर्ण पिंड के द्रव्यमान एवं घूर्णन अक्ष के चारों ओर द्रव्यमान के वितरण पर भी निर्भर करता है। यही जड़त्व आघूर्ण भौतिक महत्व है।

कुछ महत्वपूर्ण आकृतियों के जड़त्व आघूर्ण के सूत्र

1. वृत्ताकार छल्ला या वलय $I = mr^2$

2. वृत्ताकार डिस्क $I = \frac{1}{2}mr^2$

3. ठोस बेलन $I = \frac{1}{2}mr^2$

4. ठोस गोला $I = \frac{2}{5}mr^2$

5. खोखला गोला (गोलीय कोश) $I = \frac{2}{3}mr^2$

घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration)

यदि पिंड के संपूर्ण द्रव्यमान को किसी एक बिंदु पर केंद्रित माना जाए, एवं जिसकी घूर्णन अक्ष से लंबवत दूरी इतनी हो कि अगर दूरी के वर्ग को पिंड के द्रव्यमान से गुणा करें तो घूर्णन अक्ष के परितः पिंड का जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो जाए। तो इस दूरी को घूर्णन त्रिज्या कहते हैं। इसे K से प्रदर्शित करते हैं।
माना M द्रव्यमान के किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण I है तब
$I = MK^2$

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{I}{M}}}$$

अतः किसी पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण तथा उसके द्रव्यमान के अनुपात का वर्गमूल उस पिंड की घूर्णन त्रिज्या कहलाती है।

जड़त्व आघूर्ण संबंधी प्रमेय

जड़त्व आघूर्ण संबंधी प्रमेय दो प्रकार की होती हैं-
(1) समांतर अक्षों की प्रमेय
(2) लम्ब अक्षों की प्रमेय

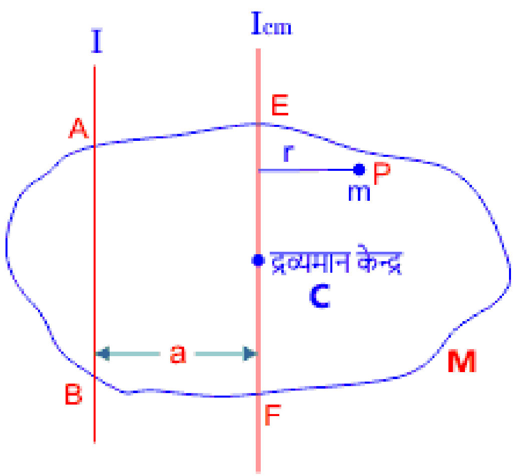
1. समांतर अक्षों की प्रमेय

किसी पिंड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I), उस पिंड के द्रव्यमान केंद्र (C) में से गुजरने वाली समांतर अक्ष के परितः पिंड के जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा उसके द्रव्यमान और दोनों समांतर अक्षों के बीच की लम्बवत दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है। अर्थात

$I = I_{cm} + Ma^2$

जहां M पिंड का संपूर्ण द्रव्यमान तथा a दोनों पक्षों के बीच की दूरी है। इसे समांतर अक्षों की प्रमेय (theorem of parallel axes) कहते हैं।

उत्पत्ति



जड़त्व आघूर्ण संबंधी समांतर अक्षों की प्रमेय

माना एक पिंड जिसका द्रव्यमान केंद्र C है इससे गुजरने वाली अक्ष EF के परितः जड़त्व आघूर्ण I_{cm} है। अक्ष EF, अक्ष AB के समांतर है तथा इनके बीच की दूरी a है। माना अक्ष EF से r दूरी पर m द्रव्यमान का एक कण है तो इस कण की अक्ष AB से दूरी (a + r) होगी। तो

कण का EF अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण = mr^2

अतः संपूर्ण पिंड का EF अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_{cm} = \Sigma mr^2$

एवं संपूर्ण पिंड का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I = \Sigma m(r + a)^2$

$I = \Sigma m(r^2 + a^2 + 2ra)$

$I = \Sigma mr^2 + \Sigma ma^2 + \Sigma m(2ra)$

चूंकि a नियत है इसलिए इसे Σ से बाहर ले सकते हैं

$I = \Sigma mr^2 + a^2\Sigma m + 2a\Sigma mr$

अब $I_{cm} = \Sigma mr^2$ है तो

$I = I_{cm} + a^2\Sigma m + 2a\Sigma mr$

चूंकि द्रव्यमान केंद्र के परितः $\Sigma mr = 0$ एवं $\Sigma m = M$ है तब

$$\boxed{I = I_c m + Ma^2}$$

यही जड़त्व आघूर्ण संबंधी समांतर अक्ष की प्रमेय हैं।

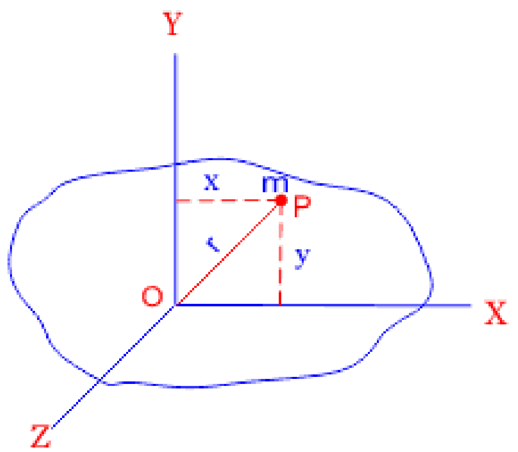
2. लम्ब अक्षों की प्रमेय

किसी समतल पटल का उसके तल में ली गई परस्पर दो अक्षों OX तथा OY के परितः जड़त्व आघूर्ण का योग, इन अक्षों के कटान बिंदु O से जाने वाली तथा समतल पटल के लंबवत अक्ष OZ के परितः जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है अर्थात

$I_X + I_Y + I_Z$

जहां I_X तथा I_Y पटल की अक्ष OX व OY के परितः जड़त्व आघूर्ण है इसे लम्ब अक्षों की प्रमेय (theorem of perpendicular axes) कहते हैं।

उत्पत्ति



जड़त्व आघूर्ण संबंधी लंबवत अक्ष की प्रमेय

माना समतल पटल के तल में दो परस्पर लंबवत अक्ष OX व OY हैं। चित्र में P बिंदु पर पिंड का एक कण है जिसका द्रव्यमान m है एवं इसकी कटान बिंदु से दूरी r है तो

पूरे पटल का OX अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_X = \Sigma my^2$

इसी प्रकार पटल का OY अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_Y = \Sigma mx^2$

अतः OZ अक्ष के परितः पूरे पटल का जड़त्व आघूर्ण

$I_Z = \Sigma mr^2$

$I_Z = \Sigma m(x^2 + y^2)$ (चूंकि $r^2 = x^2 + y^2$)

$I_Z = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$

अतः Σmx^2 तथा Σmy^2 के मान रखने पर

$I_Z = I_Y + I_X$

$$\boxed{I_Z = I_X + I_Y}$$

यही जड़त्व आघूर्ण संबंधी लम्ब अक्षों की प्रमेय हैं।