गति के नियम

प्राक्कथन

भौतिक में किसी भी प्रश्न का हल ज्ञात करने के लिए इस अध्याय में अच्छी पकड़ होनी चाहिए। दैनिक जीवन में होने वाली बहुत सी घटनाओं को इस अध्याय के आधार पर समझाया जा सकता है। इस अध्याय को अच्छी तरह से समझने के लिए गति की समीकरणें एवं सदिश का ज्ञान होना अतिआवश्यक है। प्रकृति में मूल रूप से यांत्रिकी में काम आने वाले मुख्यतः पाँच बल हैं (भार, प्रतिक्रिया बल, घर्षण , स्प्रिंग बल, तनाव) जो हमारे ज्यादातर काम में आते है तथा इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इन बलों से संबंधित सभी प्रश्नों का उत्तर बड़ी आसानी से दे पायेंगे, ऐसी हमें उम्मीद है।

यह पुस्तिका इस अध्याय में उपयोग होने वाली सभी संकल्पनात्मक (theory) तथा प्रायोगिक व्याख्याओं को सम्मिलित रखती है। प्रत्येक टॉपिक की थ्योरी के साथ उदाहरण दिये गये हैं। प्रत्येक टॉपिक के थ्योरी भाग के अन्त में सभी तरह के मिश्रित (miscellaneous) साधित (solved) उदाहरण दिये हुए हैं, जो इस अध्याय की सभी संकल्पनाओं के अनुप्रयोग को स्पष्ट करते हैं।

विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है, कि प्रत्येक विद्यार्थी इन सभी हल किये उदाहरणों को अवश्य पढ़ें, समझें ऐसा करने से इसे सम्बन्धित टॉपिक को अच्छी तरह समझने में मदद मिलेगी।

गति के नियम में कुल प्रश्नों की संख्या है :

अध्याय में उदाहरण 36

दृष्टान्तीय उदाहरण 10

कुल प्रश्नों की संख्या 46

1. गति का प्रथम नियम

इस नियमानुसार, यदि कोई वस्तु स्थिर अवस्था में है, तो वह स्थिर ही रहेगी तथा यदि गतिशील अवस्था में है तो गतिशील ही रहेगी, जब तक कि वस्तु पर बाह्य बल कार्य न करे।

(i) यह नियम जड़त्व का नियम भी कहलाता है। जड़त्व किसी वस्तु का वह गुण है, जिससे वह अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है।

(ii) बल किसी वस्तु की स्थानान्तरीय गति में परिवर्तन करने हेतु आवश्यक कारक है ।

(iii) गति का प्रथम नियम बल को परिभाषित करता है।

Ex. (a) कपड़े को झाड़कर धूल साफ करना।

(b) चलती गाड़ी में अचानक ब्रेक लगाने से यात्रियों का आगे की ओर झुकना।

2. गति का द्वितीय नियम

इस नियमानुसार, किसी वस्तु के संवेग–परिवर्तन की दर (संवेग = द्रव्यमान × वेग) वस्तु पर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होता है तथा इसकी दिशा बल की दिशा के अनुदिश होती है।

गणितीय रूप में $\vec{F} \propto \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\Rightarrow \quad \vec{F} = k\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

(यदि बल को इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $k = 1$)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

अदिश रूप में , $F = ma$

(i) बल एक सदिश राशि है, जिसका मात्राक न्यूटन या $\frac{Kg.m}{sec^2}$ (MKS) में तथा डाइन या $\frac{gm \times cm}{sec^2}$ (C. G. S.) में होता है

(ii) बल की विमा $[MLT^{-2}]$

(iii) गति का द्वितीय नियम बल का परिमाण व मात्राक बताता है

(iv) यदि m नियत नहीं है, तो

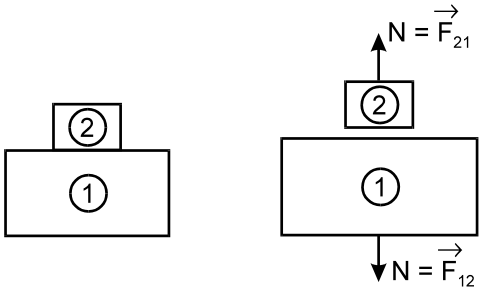
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

जैसे रॉकेट प्रक्षेपण में, ईधंन का द्रव्यमान समय के साथ परिवर्तित होता रहता है।

3. गति का तृतीय नियम

इस नियमानुसार " प्रत्येक क्रिया के बराबर तथा विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है। जब दो वस्तु A तथा B एक–दूसरे के ऊपर बल लगाती हैं तो A के द्वारा B पर क्रिया बल $\left(\vec{F}_{BA}\right)$ तथा वस्तु B द्वारा A पर प्रतिक्रिया $\left(\vec{F}_{AB}\right)$ बल लगता है। ये दोनों बल बराबर व विपरीत होते हैं।

अतः $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$



(i) यह नियम बल की प्रकृति बताता है।

(ii) क्रिया तथा प्रतिक्रिया सदैव भिन्न–भिन्न वस्तुओं पर लगते हैं।

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

आवेग : यदि किसी वस्तु पर बल $\vec{F}$ अल्प समयान्तराल Δt तक आरोपित किया जाय तो $\vec{F}$ व Δt का गुणनफल आवेग कहलाता है।

i.e. आवेग = बल × समयान्तराल

$\Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \vec{F} \times \Delta t$

गति के द्वितीय नियम से

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

जहाँ $\vec{p}_i$ तथा $\vec{p}_f$ वस्तु के क्रमशः प्रारम्भिक तथा अंतिम संवेग हैं

बल का आवेग $= \vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

उदाहरण त्वरण व बल में सम्बन्ध पर आधारित

Ex.1 6 kg द्रव्यमान की वस्तु पर दो बल $(8\hat{i} + 10\hat{j})$N व $(4\hat{i} + 8\hat{j})$N कार्यरत हैं, तो वस्तु में उत्पन्न Roj.k gksxk (m/s^2) में–

(A) $(3\hat{i} + 2\hat{j})$ (B) $12\hat{i} + 18\hat{j}$

(C) $\frac{1}{3}(\hat{i} + \hat{j})$ (D) $2\hat{i} + 3\hat{j}$

Sol.(D) दिया है $\vec{F}_1 = 8\hat{i} + 10\hat{j}$

तथा $\vec{F}_2 = 4\hat{i} + 8\hat{j}$

कुल बल $\vec{F} = 12\hat{i} + 18\hat{j}$

त्वरण $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{12\hat{i}+18\hat{j}}{6}$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j}$ m/sec^2

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9}$

$= \sqrt{13}$ m/sec^2

अतः सही उत्तर (D) है।

Example based on Second Law & Third Equation of Motion

Ex.2 1000 kg की एक कार 18 km/hr के वेग से गतिमान है। यदि इसे 1000 N ब्रेक बल से रोका जाये, तो रूकने से पहले कार द्वारा तय दूरी होगी –

(A) 1 m (B) 162 m

(C) 12.5 m (D) 144 m

Sol.(C) F = ma से

$\Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{1000}{1000} = 1$ m/s^2

जैसे कि बल, ब्रेक बल है, अतः त्वरण –1m/s^2 होगा (मंदन) अब $v^2 = u^2 + 2as$, हमें प्राप्त होता है।

$2as = u^2$

$\Rightarrow s = \frac{u^2}{2a} = \frac{\left(18 \times \frac{5}{18}\right)^2}{2} = 12.5$ m

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण गति के द्वितीय नियम पर आधारित

Ex.3 2 kg का धातु–ब्लॉक किसी चिकने तल पर स्थित है। इस पर 1 kg/s की दर से व 5 m/s वेग से पानी की धार छोड़ी जाती है। तो ब्लॉक का प्रारम्भिक त्वरण होगा –

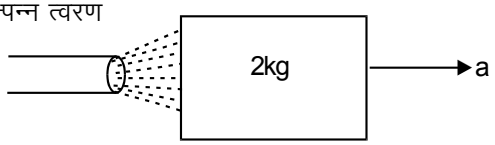
(A) 2.5 m/s^2 (B) 5 m/s^2

(C) 0.4 m/s^2 (D) 0

Sol.(A) पानी की धार द्वारा ब्लॉक पर आरोपित बल

$F = v\frac{dm}{dt} = 5 \times 1 = 5N$

5N बल की क्रिया द्वारा, 2kg द्रव्यमान के ब्लॉक में उत्पन्न त्वरण



5 N के इस बल के प्रभाव में 2 kg द्रव्यमान का ब्लॉक एक त्वरण से गति करेगा, जो दिया गया है–

F = ma

a = F/m = 5/2 = 2.5 m/s^2

अतः सही उत्तर (A) है।

Example based on Second Law of Motion or Relation of Change in Momentum

Ex.4 v वेग से गतिमान गेंद u वेग से गेंद की ओर गतिमान दीवार, से टकराती है तथा ये t sec तक प्रत्यास्थ टक्कर करती है, गेंद पर माध्य प्रत्यास्थ बल होगा –

(A) $\frac{2m(v+u)}{t}$ (B) $\frac{2m(v+2u)}{t}$

(C) $\frac{m(2v+u)}{t}$ (D) $\frac{m(2u+v)}{t}$

Sol.(A) गेंद की सापेक्ष चाल = (v + u)

दुबारा उछलने के बाद चाल

= – (v + u)

अतः $F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$

$= \frac{m[(v+u)-\{-(v+u)\}]}{t}$

$= \frac{2m(v+u)}{t}$

अतः सही उत्तर (A) है।

उदाहरण गति के तृतीय नियम पर आधारित

Ex.5 एक आदमी m द्रव्यमान की गोलियों को मशीन गन से v वेग से दागता है। यदि वह प्रति सेकण्ड n गोलियाँ दागता हो, तो आदमी पर प्रति सेकण्ड प्रतिक्रिया बल लगेगा -

(A) $\frac{m}{v}n$ (B) m n v

(C) $\frac{mv}{n}$ (D) $\frac{vn}{m}$

Sol.(B) $F = \frac{dp}{dt}$

$\Rightarrow F\,dt = dp = p_2 - p_1$

$\Rightarrow F \times 1 = mnv - 0$

$\Rightarrow F = mnv$

(1 सेकण्ड में दागी गयी गोलियों का कुल द्रव्यमान = mn)

अतः सही उत्तर (B) है।

उदाहरण गति के क्रिया–प्रतिक्रिया के नियम पर आधारित

Ex.6 15 kg द्रव्यमान की एक वस्तु 10 m/s के वेग से गतिमान है। प्रतिरोधी बल, जो इसे 15 सेकण्ड में रोक दे, होगा–

(A) 10 N (B) 5 N

(C) 100 N (D) 50 N

Sol.(A) प्रारम्भिक संवेग = 15 × 10 = 150 kgm/s

तथा बल = $\frac{\text{change in momentum}}{\text{time}}$

$= \frac{0-150}{15} = -10$ N

वस्तु की गति के विपरीत 10N का नियत बल लगाना होगा

अतः सही उत्तर (A) है।

उदाहरण बल और आवेग में सम्बन्ध पर आधारित

Ex.7 क्रिकेट की एक गेंद, जिसका द्रव्यमान 250 gm है, 24 m/s के वेग से एक बल्ले से टकराती है, जिससे विपरीत दिशा में इसका वेग 28 m/s हो जाता है। गेंद पर कार्यकारी बल क्या होगा, यदि गेंद व बल्ले का सम्पर्क समय 1/100 sec हो–

(A) 1300 N, गेंद की अंतिम दिशा की ओर

(B) 13 N, गेंद की प्रारम्भिक दिशा की ओर

(C) 130 N, गेंद की अंतिम दिशा की ओर

(D) 1.3 N, गेंद की प्रारम्भिक दिशा की ओर

Sol.(A) अंतिम दिशा की ओर संवेग में परिवर्तन आवेग के बराबर होता है

अतः आवेग = $\frac{250}{1000} \times 28 - \left(-\frac{250}{1000} \times 24\right) = 13$ Ns

तथा बल = $\frac{\textbf{खपयक}}{\textbf{भिस}} = \frac{13}{1/100}$

= 1300 N गेंद की अन्तिम दिशा की ओर

अतः सही उत्तर (A) हैं।

उदाहरण बल–संवेग सम्बन्ध पर आधारित

Ex.8 किसी कण पर 2 N का बल 2 sec तक लगता है, तो संवेग में परिवर्तन होगा –

(A) 2 Ns (B) 4 Ns

(C) 6 Ns (D) 3 Ns

Sol.(C) हम जानते हैं कि $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{F}\,dt = d\vec{p}$

$\Rightarrow 2 \times 2 = d\vec{p}$

$\Rightarrow 4 = d\vec{p}$

अतः संवेग में परिवर्तन = 4 N.s

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण संवेग में परिवर्तन पर आधारित

Ex.9 2 kg की एक वस्तु 2 m/sec के वेग से x-दिशा में गति कर रही है। यदि इस पर 4 N का बल y दिशा में 1 sec तक आरोपित किया जाये, तो कण का अंतिम वेग होगा–

(A) $2\sqrt{2}$ m/s (B) $\sqrt{2}$ m/s

(C) $1/\sqrt{2}$ m/s (D) $1/2\sqrt{2}$ m/s

Sol.(A) हम जानते है कि $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{F}\,dt = d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

$= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

$\Rightarrow 4\hat{j}.1 = 2.\vec{v}_2 - 2(2\hat{i})$

$\Rightarrow 2\vec{v}_2 = 4\hat{j} + 4\hat{i}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = 2\hat{i} + 2\hat{j}$

$\Rightarrow \quad |\vec{v}_2| = 2\sqrt{2}$ m/s

अतः सही उत्तर (A) है।

उदाहरण औसत बल की गणना पर आधारित

Ex.10 150 g द्रव्यमान की क्रिकेट की गेंद 12 m/sec से गति कर रही है, जो किसी बल्ले से टकराने के बाद 20 m/sec से लौट जाती है। गेंद पर बल यदि 0.01 sec तक लगता हो, तो बल्ले द्वारा गेंद पर आरोपित औसत बल होगा –

(A) 48 N (B) 40 N
(C) 480 N (D) 400 N

Sol.(C) गेंद का प्रारम्भिक संवेग

$$= \frac{150}{1000} \times 12 = 1.8 \text{ kg.m/sec}$$

गेंद का अंतिम संवेग

$$= -\frac{150}{1000} \times 20 = -3.0 \text{ kg m/sec}$$

संवेग में परिवर्तन = 4.8 kg m/sec

औसत आरोपित बल = आवेग/समय $= \frac{4.8}{.01}$

= 480 N

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण आवेग की गणना पर आधारित

Ex.11 20 kg की वस्तु 3 m/s, के वेग से गतिमान है, जो किसी दीवार से टकराकर उसी वेग से वापस लौट जाती है, वस्तु पर आवेग होगा –

(A) 60 Ns (B) 120 Ns
(C) 30 Ns (D) 180 Ns

Sol.(B) वस्तु का प्रारम्भिक संवेग

= mu = 20 × 3 = 60

तथा वस्तु का अंतिम संवेग

= – mu = –20 × 3 = – 60

प्रारम्भिक दिशा की ओर वस्तु के संवेग में परिवर्तन = – 60 – 60 = –120

वस्तु का विपरीत दिशा में संवेग में परिवर्तन = 120

∴ वस्तु पर दिया गया आवेग = 120 Ns

अतः सही उत्तर (B) है।

4. निर्देश तंत्र

प्रेक्षक अंतरिक्ष में जहाँ कहीं भी स्थित होता है वह उसका निर्देश तंत्रा कहलाता है। निर्देश तंत्रा निर्देशांक पद्धति से जुड़ा हुआ एक तंत्र है जो कि स्थिति एवं घटनाओं के लिए घड़ी का काम करता है।

निर्देश तंत्र के प्रकार :

4.1 जड़त्वीय निर्देश तंत्र

4.2 अजड़त्वीय निर्देश तंत्र

4.1 जड़त्वीय निर्देश तंत्र :

(a) ऐसा निर्देश तंत्रा जिसमें न्यूटन की गति का प्रथम नियम लागू हो उसे जड़त्वीय निर्देश तंत्र कहेंगे।

(b) यह जड़त्वीय निर्देश तंत्र या तो विरामावस्था में या एकसमान वेग से गति करता है।

(c) जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष नियत वेग से गतिशील निर्देश तंत्र भी जड़त्वीय होता है।

(d) जड़त्वीय तंत्र में यदि किसी वस्तु पर परिणामी बल शून्य है तो, या तो वह स्थिर अवस्था में रहेगी या फिर वह एकसमान वेग से गति करेगी

(e) जड़त्वीय निर्देश तंत्र में यदि कण का त्वरण शून्य हो तो यह सभी जड़त्वीय तंत्राों के लिये शून्य होगा।

(f) आदर्श रूप से, प्रायोगिक उपयोग के लिये ब्रह्माण्ड में जड़त्वीय तंत्र का अस्तित्व नहीं है एक निर्देश तंत्र को जड़त्वीय तंत्र के रूप में माना जा सकता है यदि उसका त्वरण, वस्तु के त्वरण के सापेक्ष नगण्य मान लिया जाए।

टिप्पणी :

(i) गिरते हुए सेव का त्वरण ज्ञात करने के लिऐ, पृथ्वी को जड़त्वीय निर्देश तंत्र माना जा सकता है।

(ii) लेकिन इसके विपरीत ग्रहों के अध्ययन के लिए पृथ्वी को तो अजड़त्वीय निर्देश तंत्रा मानेंगे जबकि सूर्य को जड़त्वीय निर्देश तंत्र।

4.2 अजड़त्वीय निर्देश तंत्रः

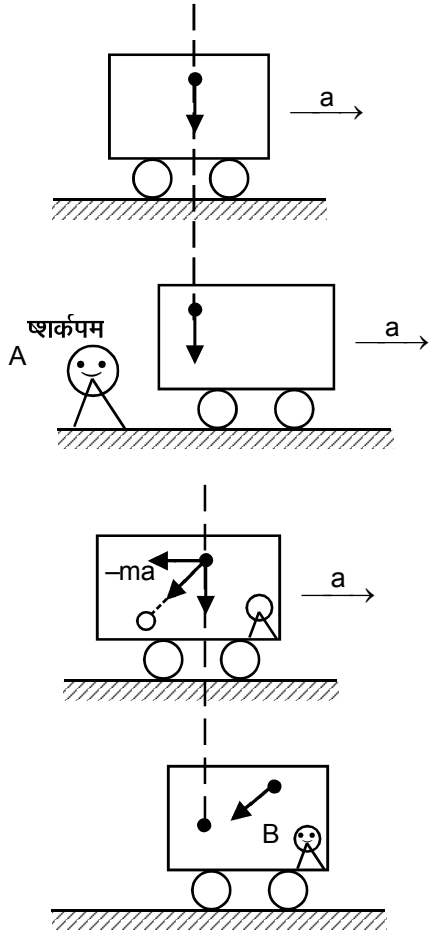
(i) त्वरित निर्देश तंत्र अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में न्यूटन की गति का प्रथम नियम लागू नहीं होता।

(ii) **छद्म बलः** वह काल्पनिक बल जो कि न्यूटन के नियम के अनुसार भौतिक अवस्था की व्याख्या करने के लिए केवल अजड़त्वीय प्रेक्षक द्वारा लगाया जाता है।

(iii) छद्‌म बल का परिमाण F_p, वस्तु के द्रव्यमान m , एवं तंत्र के त्वरण f के गुणनफल के बराबर होता है।

(iv) छद्‌म बल की दिशा तंत्र के त्वरण की दिशा के विपरीत होती है। $F_p = -ma$

(v) छद्‌म बल एक काल्पनिक बल है यानि कि भौतिक रूप से इसका कोई उद्‌भव बिन्दु नहीं है तथा यह किसी पारस्परिक क्रिया की वजह से उत्पन्न नहीं हुआ है। एवं यह क्रिया प्रतिक्रिया के जोड़े के रूप में भी नहीं होता।

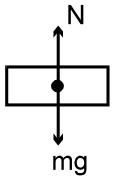


, d xsa dks dkj ds vanj fxjk, k tkrk gS tks fd i`Foh ea fLFkj gS fdUrq dkj dk Roj.k दायीं ओर है।

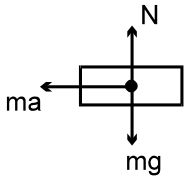
(i) जमीन पर स्थिर प्रेक्षक प्रेक्षित करता है कि गेन्द g त्वरण के साथ ऊर्ध्वाधर रुप से नीचे गिर रही है	(i) त्वरित कार में प्रेक्षक प्रेक्षित करता है कि गेन्द नीचे एवं कार के बायें तरफ गिरती है
(ii) इस प्रेक्षक के अनुसार केवल कार क्षैतिज गति करती है न कि गेन्द	(ii) इस प्रेक्षक के अनुसार गेंद का पीछे की ओर त्वरण छद्‌म बल के कारण है।

Ex. एक m द्रव्यमान का ब्लॉक चिकने क्षैतिज तल पर रखा है तथा यह दो प्रेक्षकों क्रमशः A व B द्वारा प्रेक्षित किया गया है। प्रेक्षक A जमीन पर स्थिर है तथा प्रेक्षक B कार में दाँयी तरफ a त्वरण से गति कर रहा है। अतः A व B द्वारा ब्लॉक के प्रेक्षित मुक्त पिण्ड आरेख बनाइये –

Sol.



A के सापेक्ष ब्लॉक का मुक्त पिण्ड आरेख



B के सापेक्ष ब्लॉक का मुक्त पिण्ड आरेख

5. लिफ्ट में गति :

भार :

पृथ्वी किसी वस्तु को अपने गुरुत्व आकर्षण के प्रभाव में जिस बल से केन्द्र की ओर खींचती है, वह उस वस्तु का भार कहलाता है। इस बल द्वारा वस्तु में उत्पन्न त्वरण गुरूत्वीय त्वरण कहलाता है।

यदि m द्रव्यमान की वस्तु का भार W हो तो

$\vec{W} = m\vec{g}$ न्यूटन

Note:

किसी m द्रव्यमान की वस्तु का भार m किग्रा भार या m किग्रा बल के रूप में भी व्यक्त करते है।

m किग्रा. भार = mg न्यूटन

यदि कोई वस्तु त्वरित प्लेटफार्म पर स्थित है, तो वस्तु का भार परिवर्तित महसूस होता है तथा यह नया भार आभासी भार कहलाता है। माना W = mg न्यूटन, भार का एक व्यक्ति किसी लिफ्ट में खड़ा है। अब

हम निम्न स्थितियों की विवेचना करते हैं –

Case (A) :

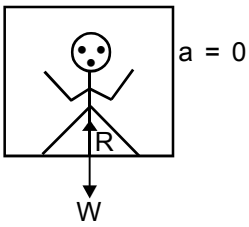
जब लिफ्ट विराम में है ($\vec{v} = 0$ या नियत) :

इस स्थिति में प्रतिक्रिया बल

R = mg = 0

अतः आभासी भार

W' = वास्तविक भार = mg

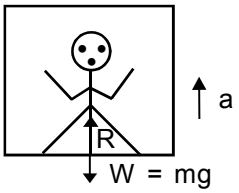


Case (B) :

यदि लिफ्ट ऊपर की ओर त्वरित होती है :

(i.e. $\vec{a}$ = नियत)

व्यक्ति पर कार्यरत कुल बल
= ma
$\therefore$ R – mg = ma
आभासी भार
= W' = R = mg + ma

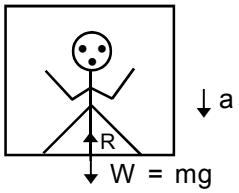


नोट : आभासी भार (W') > वास्तविक भार (mg)

Case (C) :

यदि लिफ्ट नीचे की ओर त्वरित होती है :

यहाँ व्यक्ति का भार 'mg' नीचे की ओर तथा प्रतिक्रिया R ऊपर की ओर कार्य करती है



आभासी भार W' = R
$\therefore$ mg – R = ma $\Rightarrow$ R = mg – ma

नोट:

(i) आभासी भार W' < वास्तविक भार W

(ii) यदि g = a
W' = 0

अतः मुक्त रूप से गिरते हुए लिफ्ट में, व्यक्ति भारहीनता की स्थिति अनुभव करेगा

Case (D) :

लिफ्ट नीचे की ओर इस प्रकार त्वरित है कि a > g :

इस स्थिति में ma वस्तु के भार (mg) से अधिक है,

$\therefore$ आभासी भार W' = m(g – a) = ऋणात्मक

यहाँ ऋणात्मक आभासी भार का कोई अर्थ नहीं है इसलिये शून्य होगा। अतः व्यक्ति ऊपर की ओर त्वरित होगा तथा लिफ्ट की छत पर ठहरेगा

उदाहरण प्रतिक्रिया बल पर आधारित

Ex.12 60 kg द्रव्यमान का आदमी अपने कन्धे पर 60 N का भारी थैला ले जाता है। जमीन द्वारा उनके पैरो पर ऊपर की ओर लगने वाला बल होगा-
(A) 588 N (B) 648 N
(C) 528 N (D) 708 N

Sol.(B) आदमी का भार = 60 × 9.8 = 588 N
जमीन पर कुल बल = 588 + 60 = 648 N
$\therefore$ जमीन द्वारा आदमी के पैरों पर ऊपर की ओर लगने वाला बल = 648 N
अतः सही उत्तर (B) है।

Example based on Comparison between Uniform Motion & Accelerated Motion of Lift

Ex.13 किसी स्थिर लिफ्ट में स्प्रिंग तुला से एक व्यक्ति का भार 50 kg पढ़ा जाता है, जब वह तुला पर खड़ा है। यदि लिफ्ट
(i) नियत वेग (ii) नियत त्वरण, से ऊपर की ओर गति करने लगे, तो तुला के पाठ्यांक क्या होगें ?

(A) 50 kg wt, $\left(50+\frac{50a}{g}\right)$ kg wt

(B) 50 kg wt, $\left(50+\frac{50g}{a}\right)$ kg wt

(C) 50 kg wt, $\left(\frac{50a}{g}\right)$ kg wt

(D) 50 kg wt, $\left(\frac{50g}{a}\right)$ kg wt

Sol.(A)

(i) नियत वेग की स्थिति में प्रतिक्रिया बल शून्य होगा इसलिए आभासी भार = वास्तविक भार,
अतः तुला का पाठ्यांक 50 kg भार होगा।

(ii) इस स्थिति में त्वरण ऊपर की ओर है, प्रतिक्रिया बल R = ma नीचे की ओर लगेगा, इसलिए आभासी भार वास्तविक भार से अधिक होगा
अर्थात् W' = W + R = m (g + a)
अतः तुला का पाठ्यांक m(g + a) Newton
$= \left(50+\frac{50a}{g}\right)$ kg wt
अतः सही उत्तर (A) है।

उदाहरण जब लिफ्ट उपर की ओर त्वरित हो

Ex.14 किसी केबिल से 25 kg किग्रा की लिफ्ट संतुलित की जाती है, जब केबिल में तनाव 175 N हो, तो लिफ्ट का त्वरण होगा -
(A) – 2.8 m/s^2 (B) 16.8 m/s^2
(C) – 9.8 m/s^2 (D) 14 m/s^2

Sol.(A) तनाव = m (g + a), जब लिफ्ट ऊपर की ओर गतिमान है, मान रखने पर
175 = 25 (9.8 + a)
$\Rightarrow$ a = –2.8 m/s^2
(ऋणात्मक चिन्ह यह बता रहा है कि लिफ्ट नीचे की तरफ गतिमान है) अतः सही उत्तर (A) है।

Ex.15 किसी लिफ्ट की छत से लगी डोरी पर एक वस्तु लटकायी जाती है। जब लिफ्ट त्वरित होती है तो डोरी में तनाव दुगुना पाया जाता है, तो त्वरण होगा

(A) 4.9 m/s^2 (B) 9.8 m/s^2
(C) 19.6 m/s^2 (D) 2.45 m/s^2

Sol.(B) आभासी तनाव,

$$T = 2T_0$$

अतः $$T = 2T_0 = T_0\left(1+\frac{a_0}{g}\right)$$

या $$2 = 1 + \frac{a_0}{g}$$

$\Rightarrow$ $$a_0 = g = 9.8\ m/s^2$$

अतः सही उत्तर (B) है।

उदाहरण जब गुब्बारा ऊपर की ओर त्वरित गति कर रहा हो

Ex.16 m द्रव्यमान का गुब्बारा a त्वरण से ऊपर की ओर गति कर रहा है। इसका त्वरण दुगुना करने के लिए गुब्बारे से कितना द्रव्यमान हटाना होगा – (हवा का बल समान है)

(A) $\frac{ma}{a+g}$ (B) $\frac{m}{a+g}$

(C) $\frac{ma}{2a+g}$ (D) $\frac{2ma}{a+g}$

Sol.(C) माना हवा का उत्प्लावन बल R है

चूंकि गुब्बारा a त्वरण से उठ रहा है,

$R - mg = ma$ ....(1)

दूसरी स्थिति में, माना त्वरण दुगुना (2a) करने हेतु m_1 द्रव्यमान हटाना होगा।

अब $R - (m - m_1)\,g = (m - m_1)\,2a$ ....(2)

समीकरण (1) तथा (2) से

$$m_1 = \frac{ma}{g+2a}$$

अतः सही उत्तर (C) है।

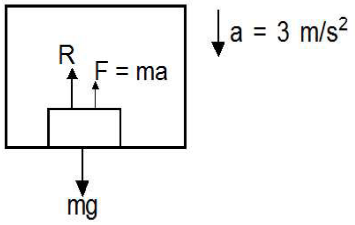
उदाहरण जब लिफ्ट नीचे की ओर भिन्न स्थितियों में गति करे

Ex.17 60 kg किग्रा द्रव्यमान नीचे आती हुई लिफ्ट के फर्श पर रखा गया है। लिफ्ट पहले 3 m/sec^2 त्वरण से गति करती है, फिर नियत वेग से तथा अन्त में 3 m/sec^2 के मंदन से गति करती है। प्रत्येक स्थिति में, लिफ्ट द्वारा वस्तु पर आरोपित प्रतिक्रिया बल क्रमशः होंगे –

(A) 408 N, 580 N, 768 N
(B) 408 N, 768 N, 588 N
(C) 408 N, 588 N, 768 N
(D) 768 N, 408 N, 588 N

Sol.(C)

Sol :(i) चूंकि लिफ्ट नीचे की ओर त्वरण 3 m/sec^2 से आ रही है, वस्तु पर ऊपर की ओर जड़त्वीय बल



बल $F = ma$

अब $R + F = mg$

या $R = mg - F$

$= mg - ma$

$= m(g - a)$

$= 60\ (9.8 - 3)$

$= 408$ N

(ii) जब लिफ्ट नियत वेग $a = 0$ से नीचे आती है

अतः $R = mg = 60 \times 9.8 = 588$ N

(iii) जब लिफ्ट मंदन 3 m/sec^2 से नीचे आती है तो नीचे की ओर 3 m/sec^2 का मंदन ऊपर की ओर 3 m/sec^2 त्वरण के तुल्य होगा,

अतः छद्म बल की दिशा नीचे की ओर होगी

$R = mg + ma$

$= m\,(g + a)$

$= 60\ (12.8)$

$= 768$ N

अतः सही उत्तर (C) है।

Example based on Comparision between Upward & Downward Motion of Lift With Acceleration

Ex.18 10 kg द्रव्यमान लिफ्ट में एक स्प्रिंग तुला से लटक रहा है। यदि लिफ्ट g/3 त्वरण से ऊपर की ओर व नीचे की ओर गति करे, तो तुला का पाठ्यांक क्रमशः होगा –

(A) 6.67 kg, 13.3 kg (B) 13.3 kg, 6.67 kg
(C) 32.6 kg, 0 (D) 13.3 kg,0

Sol.(B) जब लिफ्ट उपर की ओर गति करती है m(g+a) = बल

तुला का पाठ्यांक $= \frac{m(g+a)}{g} = \frac{10\left(g+\frac{g}{3}\right)}{g}$

$= 13.3$ kg

जब लिफ्ट नीचे की ओर गति कर रही हो तो तुला का पाठ्यांक

$= \frac{m(g-a)}{g} = \frac{10\left(g-\frac{g}{3}\right)}{g} = 6.67$ kg

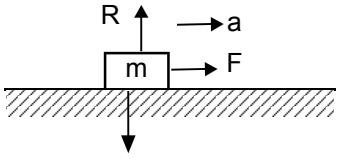
अतः सही उत्तर (B) है।

6. चिकने क्षैतिज तल पर ब्लॉक की गति

Case (A) :

जब वस्तु पर क्षैतिज बल कार्यरत हो :

वस्तु पर कार्यरत बलों का विभाजन चित्रानुसार होगा –



जैसे कि उर्ध्वाधर दिशा में वस्तु गति नहीं कर रही है

अतः $R = mg$

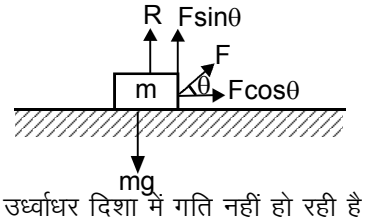
क्षैतिज गति के लिए

$F = ma$ या $a = F/m$

Case (B) :

जब क्षैतिज के साथ बल (θ) कोण बनाते हुए लगता है :

बल F का क्षैतिज घटक, $F\cos\theta$ तथा उर्ध्वाधर घटक $F \sin\theta$ है।



चूँकि उर्ध्वाधर दिशा में गति नहीं हो रही है

इसलिए $R + F \sin\theta = mg$

या $R = mg - F \sin\theta$

Note: यहाँ $R \neq mg, R < mg$

क्षैतिज गति के लिए

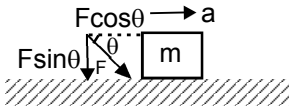
$F \cos\theta = ma$ $\qquad a = \frac{F\cos\theta}{m}$

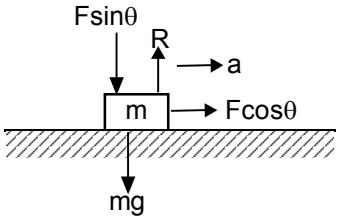
Case (C) :

जब वस्तु पर क्षैतिज से θ कोण बनाते हुए बल लगाया जाता है : (नीचे की ओर)

इस स्थिति में बल की समीकरण

$R = mg + F \sin\theta$





Note :

$R \neq mg, R > mg$

क्षैतिज गति के लिए

$F \cos\theta = ma, a = \frac{F\cos\theta}{m}$

Example based on Motion of Block on Smooth Plane in Presence of Horizontal Force

Ex.19 m द्रव्यमान की डोरी से चिकने क्षैतिज तल पर रखे M द्रव्यमान के ब्लॉक को खींचा जाता है, यदि डोरी के मुक्त सिरे पर P बल लगाया जाता है, तो डोरी द्वारा ब्लॉक पर आरोपित बल होगा –

(A) P (B) $\frac{Pm}{M+m}$

(C) $\frac{MP}{M+m}$ (D) $\frac{mP}{M+m}$

Sol.(C) ब्लॉक पर बल = ब्लॉक का द्रव्यमान × निकाय का त्वरण $= M \times \frac{P}{M+m}$

अतः सही उत्तर (C) है।

Ex.20 एक तल पर 50 kg की वस्तु को 8 m लम्बी डोरी, के मुक्त सिरे पर 108 N का बल लगाकर खींचा जाता है। 50 kg द्रव्यमान की वस्तु पर आरोपित बल कितना होगा, यदि डोरी का रेखीय घनत्व 0.5 kg/m हो -

(A) 108 N (B) 100 N
(C) 116 N (D) 92 N

Sol.(B) डोरी का द्रव्यमान = $8 \times \frac{1}{2} = 4$ kg

कुल द्रव्यमान = 50 + 4 = 54 kg

$\therefore a = \frac{F}{m} = \frac{108}{54} = 2\ m/s^2$

डोरी खींचने में प्रयुक्त बल = 4 × 2 = 8 N

वस्तु पर लगा बल = 108 – 8 = 100 N

अतः सही उत्तर (B) है।

Ex.21 15 m लम्बी तथा 2 kg/m रेखीय घनत्व की डोरी, किसी चिकने क्षैतिज मेज पर सीधी रखी गयी है,इसे 25 N के बल से खींचा जाता है। क्रिया बिन्दु से 7 m दूरी पर डोरी में तनाव होगा –

(A) 11.67 N (B) 13.33 N

(C) 36.67 N (D) इनमें से कोई नहीं

Sol.(B) डोरी का द्रव्यमान = 15 × 2 = 30 kg

त्वरण $= \frac{F}{m} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} m/s^2$

क्रिया बिन्दु से 7 m दूरी पर डोरी के प्रथम भाग का द्रव्यमान = 14 kg

∴ 14 kg द्रव्यमान को खींचने में बल

$= 14 \times \frac{5}{6} = 11.67$ N

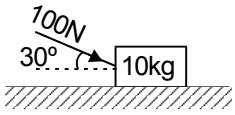
शेष बल = (25 –11.67)N = 13.33 N

अतः सही उत्तर (B) है।

Example based on

Motion of Block on Horizontal Smooth Plane When Force Making Angle with Horizontal Direction

Ex.22 10 kg का एक ब्लॉक जो चिकने क्षैतिज मेज पर रखा गया है, पर 100 N का बल लगाया जाता है ब्लॉक 10 m चलने पर चाल प्राप्त कर लेगा-



(m/sec में) (g = 10 m/sec^2)

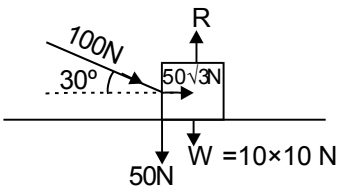
(A) 17 m/sec (B) 13.17 m/sec

(C) 1.3 m/sec (D) 1.7 m/sec

Sol.(B) ब्लॉक पर कार्यकारी विभिन्न बलों को चित्र में दिखाया गया है। 100 N के बल का

(i) क्षैतिज घटक 100 cos 30° = $50\sqrt{3}$ N तथा

(ii) उर्ध्वाधर घटक = 100 sin 30° = 50 N



चूंकि ब्लॉक सदैव मेज के सम्पर्क में है इसलिए कुल उर्ध्वाधर बल

R = mg + F sin θ = (10 × 10 + 50)N = 150 N

जब ब्लॉक मेज पर गति करता है तो बल के क्षैतिज घटक द्वारा कार्य किया जाता है चूंकि तय की गई दूरी 10 मीटर है अतः किया गया कार्य = $50\sqrt{3} \times 10$

$= 500\sqrt{3}$ Joule

यदि ब्लॉक द्वारा प्राप्त चाल v हो तो इसकी गतिज उर्जा किये गये कार्य के बराबर होगी अतः

$500\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 10 \times v^2$

$\Rightarrow v^2 = 100\sqrt{3} \quad \Rightarrow v = 13.17$ m/sec

अतः सही उत्तर (B) है।

Ex.23 उपरोक्त उदाहरण में ब्लॉक का 2 sec बाद वेग (m/sec) में होगा-

(A) $10\sqrt{3}$ (B) $5\sqrt{3}$

(C) 10 (D) 5

Sol. त्वरण $a = \frac{F\cos\theta}{m} = \frac{50\sqrt{3}}{10}$

$= 5\sqrt{3}$ m /sec^2

2 sec, बाद वेग v = u + at

$\Rightarrow v = 0 + 5\sqrt{3} \times 2 = 10\sqrt{3}$ m/sec

अतः सही उत्तर (A) है।

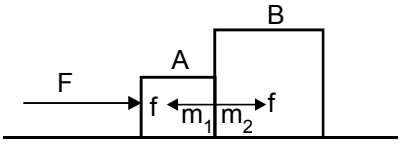
7. सम्पर्क में रखी वस्तुओं की गति ::

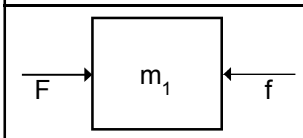
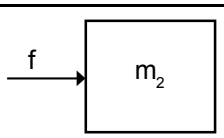
Case (A) :

दो वस्तुओं का निकाय :

माना m_1 द्रव्यमान पर बल F लगाया जाता है।

मुक्त वस्तु रेखा चित्र : (ऊर्ध्वाधर बल गति का कारण नहीं होते, इसलिये उन्हें चित्रा में नहीं दर्शाया गया)



For A	For B
	
$F - f = m_1a$	$f = m_2a$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \text{ तथा } \qquad f = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

(i) यहां f ''सम्पर्क बल'' कहलाता है।

(ii) निकाय का त्वरण निम्न सूत्रा से आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

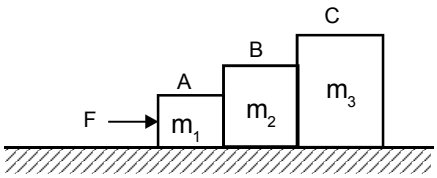
$$a = \frac{\text{force}}{\text{total mass}}$$

नोट : यदि बल F, m_2 द्रव्यमान पर लगाया जाय, तो त्वरण तो समान रहेगा, लेकिन ''सम्पर्क बल'' भिन्न होगा

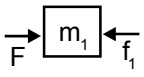
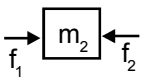
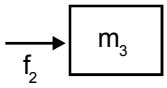
अर्थात् $f' = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2}$

Case (B) :

तीन वस्तुओं का निकाय :



मुक्त वस्तु रेखाचित्र :

For A	For B	For C
		
$F - f_1 = m_1 a$	$f_1 - f_2 = m_2 a$	$f_2 = m_3 a$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} \text{ तथा}$$

$$f_1 = \frac{(m_2 + m_3)F}{(m_1 + m_2 + m_3)}, f_2 = \frac{m_3 F}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$f_1 = m_1$ व m_2 के बीच स्पर्श बल

$f_2 = m_2$ व m_3 के बीच स्पर्श बल

याद रखिए :

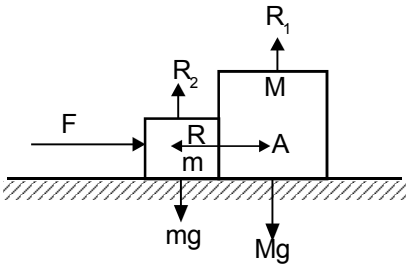
जब बल F पिण्ड C पर आरेपित होता तो स्पर्श बल भिन्न होता।

Example based on Tangential Force When Two Blocks are in Contact

Ex.24 m = 1 kg, तथा M = 2 kg के दो पिण्ड किसी घर्षणरहित टेबल पर स्पर्श करते हुऐ रखे गये है। m पर क्षैतिजबल F(=3N) लगाया जाता है। पिण्डों के बीच स्पर्श बल होगा –

(A) 2 N (B) 1 N
(C) 4 N (D) 5 N

Sol.(A) दोनों पिण्डों पर कार्यकारी कुल बलों को चित्र में दिखाया गया है। जैसे कि पिण्ड बल F के प्रभाव में दृढ़ है, इसलिए दोनों पिण्ड समान त्वरण से गति करेगें



$a = F/(m+M) = 3/(1+2) = 1 \text{ m/s}^2$

M द्रव्यमान के पिण्ड पर स्पर्श बल

$$f = Ma = \frac{MF}{M+m} = \frac{2\times 3}{2+1} = 2N$$

नोट : यदि बल M द्रव्यमान पर आरोपित किया जाता तो m पर इसकी क्रिया निम्न होगी –

$$f' = ma = \frac{mF}{M+m} = \frac{1\times 3}{2+1} = 1N$$

Example based on Acceleration of System When Two Blocks are in Contact

Ex.25 कोई बल किसी एक वस्तु पर 5 m/s^2 का त्वरण उत्पन्न करता है, तथा दूसरी वस्तु पर 15 m/s^2 का, यदि दोनों वस्तुओं को सम्पर्कित किया जाये, तो निकाय का त्वरण क्या होगा, यदि बल वही हो –

(A) 3.75 m/s^2 (B) 20 m/s^2
(C) 10 m/s^2 (D) 0.667 m/s^2

Sol.(A) निकाय का त्वरण निम्न समीकरण से दिया जाता है

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

$$\text{या } a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

$$= \frac{5\times 15}{5+15} = 3.75 \text{ m/s}^2$$

अतः सही उत्तर (A) है।

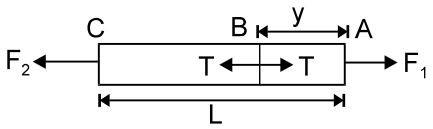
याद रखिए :

यदि n भिन्न–भिन्न वस्तुओं पर समान बल आरोपित करने पर त्वरण $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ हो तो इन्हें सम्पर्क में रखने पर तथा समान बल लगाने से निकाय का त्वरण निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots \frac{1}{a_n}$$

Example based on Solving The Question by Assuming The System of Two Parts of a Block

Ex.26 L लम्बाई तथा M द्रव्यमान की छड़ पर F_1 से y दूरी पर तनाव कितना होगा, जब छड़ पर चित्रानुसार दो असमान बल F_1 व F_2 ($<F_1$) आरोपित होते हैं।



(A) $F_1\left(1-\frac{y}{L}\right)+F_2\left(\frac{y}{L}\right)$ (B) $\frac{M}{L}y\left(\frac{F_1-F_2}{M}\right)$

(C) $F_1\left(1+\frac{y}{L}\right)+F_2\left(\frac{y}{L}\right)$ (D) $\frac{M}{L}y\left(\frac{F_1+F_2}{M}\right)$

Sol.(A) छड़ पर कुल बल $F_1 - F_2$ तथा छड़ का द्रव्यमान M है, छड़ में उत्पन्न त्वरण

$a = (F_1 - F_2)/M$ ....(i)

अब छड़ के भाग AB जिसका द्रव्यमान $(M/L)y$ तथा त्वरण समीकरण (i) द्वारा दिया गया है,

माना बिन्दु B पर तनाव T है

$F_1 - T = \frac{M}{L}y \times a$ ($F = ma$ से)

$\Rightarrow F_1 - T = \frac{M}{L}y \frac{F_1 - F_2}{M}$ (समीकरण (i) से)

$\Rightarrow T = F_1\left(1-\frac{y}{L}\right) + F_2\left(\frac{y}{L}\right)$

अतः सही उत्तर (A) है।

उदाहरण n वस्तुओं के निकाय के त्वरण पर आधारित

Ex.27 जब n विभिन्न वस्तुओं पर समान बल अलग–अलग आरोपित किया जाता है तो इनमें त्वरण क्रमशः $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{n}$ (सभी m/s^2), उत्पन्न होता है। यदि इन सभी वस्तुओं को संयुक्त रूप से जोड़ा जाये तथा समान बल आरोपित किया जाये तो त्वरण होगा –

(A) $\frac{n}{2}$ (B) $\frac{2}{n(n+1)}$

(C) $\frac{n^2}{2}$ (D) $\frac{n^2(n+1)}{2}$

Sol.(B) निकाय का परिणामी त्वरण निम्न समीकरण से दिया जाता है

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots \frac{1}{a_n}$$

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$$

$$= \frac{n}{2}[2 + (n-1)1]$$

$$= \frac{n}{2}[n+1] = \frac{2}{n(n+1)}$$ अतः सही उत्तर (B) है।

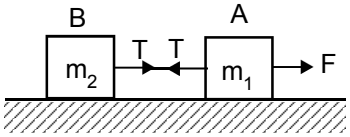
8. एक–दूसरे से जुड़ी वस्तुओं की गति

Case (A) : दो वस्तुओं के लिए :

माना वस्तु A, जिसका द्रव्यमान m_1 है, पर खिंचाव बल F है। वस्तु A का B पर खिंचाव से A व B के बीच जुड़ी डोरी में तनाव T उत्पन्न होता है तथा सम्पूर्ण डोरी में तनाव T ही रहेगा।

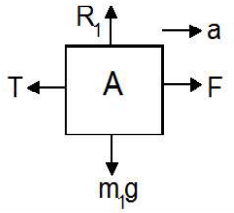
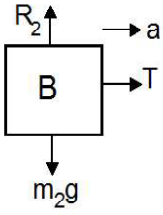
परन्तु यह B पर खिंचाव बल T तथा A पर प्रतिक्रिया खिंचाव बल T की तरह कार्य करता है।

इस स्थिति में मुक्त वस्तु रेखाचित्र निम्न होगा .



नोट : यहाँ रस्सी द्रव्यमान रहित है।

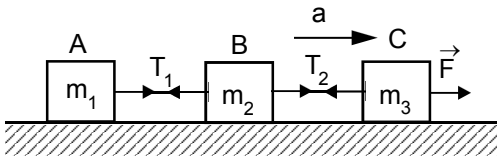
मुक्त वस्तु रेखाचित्र

For body A	For body B
	
$R_1 = m_1 g$ $F - T = m_1 a$	$R_2 = m_2 g$ $T = m_2 a$

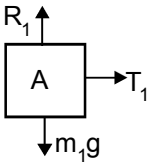
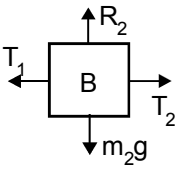
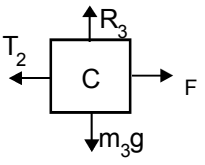
$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}}$$

Case (B) :

तीन वस्तुओं के लिए :



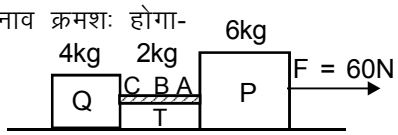
मुक्त वस्तु रेखाचित्र :

वस्तु **A** के लिए	वस्तु **B** के लिए	वस्तु **C** के लिए
		
$R_1 = m_1g$ $T_1 = m_1a$	$R_2 = m_2g$ $T_2 - T_1 = m_2a$ $\Rightarrow T_2 = m_2a + T_1$ $T_2 = (m_2 + m_1)a$	$R_3 = m_3g$ $F - T_2 = m_3a$ $\Rightarrow F = m_3a + T_2$ $= m_3a + (m_1 + m_2)a$ $F = (m_1+m_2+ m_3)a$

$\Rightarrow a = F / (m_1 + m_2 + m_3)$

Example based on Calculation of Tension When Rope is not Massless

Ex.28 6 kg तथा 4 kg के दो पिण्ड जो चिकने तल पर रखे हैं, 2 kg द्रव्यमान की डोरी से बंधे है। यदि 6 kg पिण्ड पर 60 N का नियत बल आरोपित किया जाये, तो डोरी पर बिन्दु A, B, तथा C पर तनाव क्रमशः होगा-



(A) 30 N, 25 N, 20 N (B) 25 N, 30 N, 20 N
(C) 20 N, 30 N, 25 N (D) 30 N, 20 N, 25 N

Sol.(A) निकाय का द्रव्यमान 6 + 4 + 2 = 12 kg तथा आरोपित बल 60 N है, निकाय का त्वरण

$$a = \frac{F}{m} = \frac{60}{12} = 5 \text{ m/s}^2$$

बिन्दु A पर 2 kg की डोरी व 4 kg के पिण्ड को खींचने से तनाव

$$T_A = (2 + 4) \times 5 = 30 \text{ N}$$

इसी प्रकार B व C पर

$$T_B = (1 + 4) \times 5 = 25 \text{ N}$$

तथा $T_C = (0 + 4) \times 5 = 20$ N

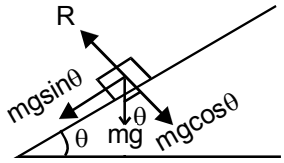
अतः सही उत्तर (A) है।

नोट : इस प्रश्न में चूंकि डोरी द्रव्यमानहीन नहीं है, इसलिए डोरी के भिन्न –भिन्न बिन्दुओं पर तनाव भिन्न–भिन्न होगा। **आरोपित बल के, निकटस्थ बिन्दु पर तनाव अधिकतम तथा दूरस्थ बिन्दु पर न्यूनतम होगा।**

9. चिकने नत समतल पर वस्तु की गति

एक वस्तु चिकने नत समतल AB जो क्षैतिज से θ कोण बनाता है, पर रखी गयी है,

वस्तु पर कार्यकारी बल निम्न है



(i) वस्तु का भार mg नीचे की ओर

(ii) प्रतिक्रिया बल R तल के लम्बवत् ऊपर की ओर

वस्तु के भार mg के तल के लम्बवत् घटक तथा समान्तर घटक mg cos θ तथा mg sin θ हैं

अतः $ma = mg \sin\theta \Rightarrow a = g \sin\theta$ ....(i)

$R = mg \cos\theta$ ...(ii)

Note :

यही परिणाम बल को क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों में वियोजित करने पर प्राप्त किया जा सकता है

$R \sin\theta = ma \cos\theta$

$mg - R \cos\theta = ma \sin\theta$

हल करने पर , $a = g \sin\theta$, $R = mg \cos\theta$

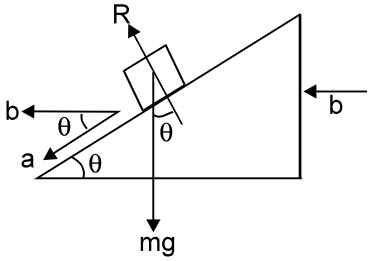
विशेष स्थिति :

जब चिकनी नत तल क्षैतिज दिशा में

त्वरण (b) से चित्राानुसार गति करता है, तो इस स्थिति में

$m (a + b \cos\theta) = mg \sin\theta$

तथा $mb \sin\theta = R - mg \cos\theta$



हल करने पर $a = g \sin\theta - b \cos\theta$

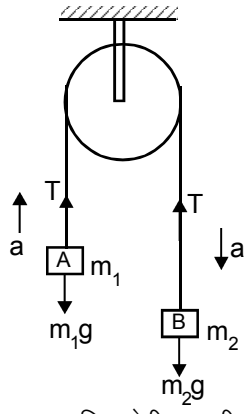
$R = m (g \cos\theta + b \sin\theta)$

10. एक डोरी से जुडी दो वस्तुओं की गति

Case (A) :

असमान द्रव्यमान की वस्तुओं की हल्की व घर्षणरहित घिरनी से लटकने पर गति :

A तथा B दो वस्तुओं जिनके द्रव्यमान m_1 व m_2 है, किसी चिकनी घिरनी P से गुजरने वाली हल्की डोरी से लटकाये गये है।



माना $m_2 > m_1$, यदि डोरी हल्की तथा समरूप है, तो सम्पूर्ण डोरी में तनाव T होगा,

A व B पर कार्य करने वाले बलों को चित्रा में दिखाया गया है। माना वस्तु A त्वरण a से ऊपर की ओर गति करता है, तथा B समान त्वरण से नीचे की ओर गति करता है

A की गति के लिए :

$$T - m_1g = m_1a \qquad ...(i)$$

B की गति के लिए :

$$m_2g - T = m_2a \qquad ...(ii)$$

हल करने पर :

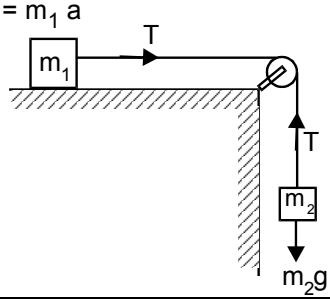
$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}g \quad \text{तथा} \quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

Case (B) :एक वस्तु (m_1) द्रव्यमान की चित्रानुसार क्षैतिज टेबल पर रखी है। इससे एक हल्की रस्सी का एक सिरा बंधा हुआ है। यह रस्सी , घिरनी से होती हुई गुजरती है तथा इसे दूसरे सिरे पर (m_2) द्रव्यमान की वस्तु लटक रही है। हमारा उद्देश्य संयोजन का त्वरण व रस्सी में तनाव ज्ञात करना है:

यहाँ

$$(m_2g - T) = m_2a \qquad ... (i)$$

और $T = m_1a$ ... (ii)

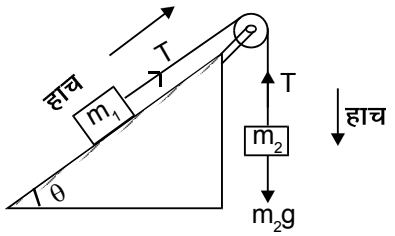


समीकरण (i) व (ii) , से

$$a = \left[\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\right]g \text{ व } T = m_1a = \left[\frac{m_1.m_2}{(m_1 + m_2)}\right]g$$

Case (C) :

उपरोक्त अवस्था के अनुसार ही इस अवस्था में (m_1) द्रव्यमान एक नत तल पर रखा है तथा तल क्षैतिज के साथ (θ) कोण बना रहा है :



तो इस अवस्था में

$$T - m_1g \sin\theta = m_1a$$

तथा $$(m_2g - T) = m_2a$$

समीकरणों को हल करने पर

$$a = \frac{(m_2 - m_1\sin\theta)g}{(m_1 - m_2)}$$

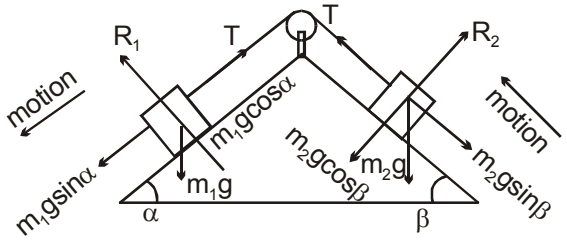
तथा $$T = m_2g - m_2a$$

या $$T = m_2g\left[1 - \frac{(m_2 - m_1\sin\theta)}{(m_1 + m_2)}\right]$$

$$= \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\theta)$$

Case (D) :

माना कि दो द्रव्यमान (m_1 व m_2) नत तलों पर रखे हैं जो कि क्षैतिज से क्रमशः α तथा β कोण बना रहे है :



तो चित्र से

$$m_1 g \sin\alpha - T = m_1 a \qquad ...(i)$$

तथा $T - m_2 g \sin\beta = m_2 a$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) को Sol करने पर

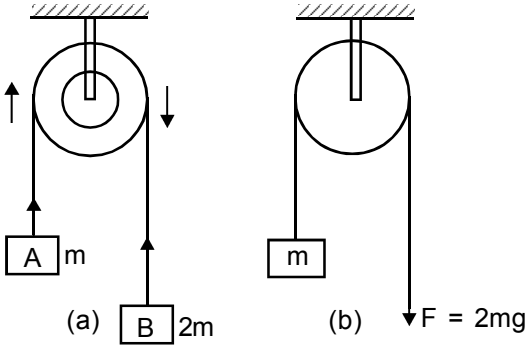
$$a = \frac{g(m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta)}{(m_1 + m_2)}$$

तथा $T = m_2 \frac{g(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta)}{(m_1 + m_2)} + m_2 g \sin\beta$

या $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\sin\alpha + \sin\beta)g$

Example based on Motion of Two Unlike Masses on Frictionless Pulley

Ex.29 चित्र (a) व (b) में दिखाऐं गये, घिरनियों के निकाय में प्रयुक्त डोरी का द्रव्यमान नगण्य है। चित्रा (a) में, द्रव्यमान m डोरी के दूसरे सिरे पर 2 m द्रव्यमान लटकाने तथा चित्रा (b) में डोरी के मुक्त सिरे पर 2 mg का बल नीचे की ओर लगाने से, ऊपर की ओर गति करता है। तो कौन सा कथन सही है–



(A) b स्थिति में त्वरण a स्थिति में उत्पन्न त्वरण का तीन गुना

(B) a स्थिति में त्वरण g तथा b में 2g है

(C) दोनों स्थितियों मे त्वरण समान है

(D) उपरोक्त में से कोई नहीं

Sol.(A) स्थिति (a) में, खिंचाव बल = 2mg – mg = mg

तथा द्रव्यमान 2m + m = 3m

त्वरण a = mg/3m = g/3

जबकि स्थिति (B), में, खिंचाव बल = 2mg – mg = mg

गति के लिए द्रव्यमान = m + 0 = m

त्वरण a = mg/m = g

अतः सही उत्तर (A) है।

Example based on Motion of Three Unlike Mass on Frictionless Pulley

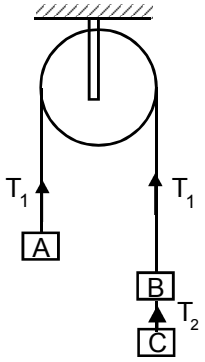
Ex.30 m द्रव्यमान के तीन पिण्ड चित्राानुसार किसी घिरनी से गुजरती डोरी से लटक रहे हैं। A व B तथा B व C से जुड़ी डोरियों में तनाव क्रमश : होंगे–

(A) $\frac{2}{3}$mg, $\frac{2}{3}$mg

(B) $\frac{2}{3}$mg , $\frac{4}{3}$mg

(C) $\frac{4}{3}$mg, $\frac{2}{3}$mg

(D) $\frac{3}{2}$mg, $\frac{3}{4}$mg



Sol.(C) इस प्रश्न में खिंचाव 2 mg है जबकि विरोधी बल mg है, अतः कुल बल

F = 2mg – mg = mg, गति के लिए द्रव्यमान

= m + m + m = 3m

इसलिए त्वरण = $\frac{\text{force}}{\text{mass}} = \frac{mg}{3m} = \frac{g}{3}$

चूंकि A ऊपर की ओर तथा B व C नीचे की ओर त्वरित है, इसलिए तनाव T_1 इस प्रकार है कि

$mg < T_1 < 2mg$

A की गति के लिए :

$T_1 = m(g + a) = m(g + g/3) = \frac{4}{3}mg$

डोरी BC में तनाव ज्ञात करने हेतु हम C की नीचे की ओर गति लेते है

अर्थात् $T_2 = m(g – a) = m(g – g/3) = (2/3)\,mg$

अतः सही उत्तर (C) है।

Example based on Motion of Two Unlike Masses on Frictionless Pulley

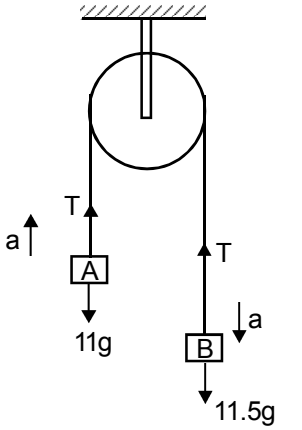
Ex.31 चित्र में, 4 sec बाद प्रत्येक कण का वेग होगा -

(A) 0.872 m/s

(B) 8.72 m/s

(C) 0.218 m/s

(D) 2.18 m/s



Sol.(A) जैसे कि A ऊपर की ओर तथा B नीचे की ओर a त्वरण से गति कर रहे हैं।

A की गति के लिए :

$T - 11\,g = 11\,a$ ..... (i)

B की गति के लिए :

$11.5\,g - T = 11.5\,a$ ..... (ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$g = \frac{(11.5 - 11)9.8}{11.5+11}$$

$= 0.218\ m/sec^2$

यह मानते हुए कि कण प्रारम्भ में विराम में है, 4 sec बाद कणों का वेग

$v = u + at = 0 + 0.218 \times 4 = 0.872\ m/s$

अतः सही उत्तर (A) है।

Ex.32 उपरोक्त उदाहरण में, 4 sec में चढ़ी गयी ऊँचाई या उतरी गई गहराई (स्थितिनुसार) होगी –

(A) 1.744 m (B) 17.44 m

(C) 0.1744 m (D) इनमें से कोई नहीं

Sol.(A) 4 sec में A द्वारा चढ़ी गई ऊँचाई

$$h = ut + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}(0.218)\,4^2 = 1.744\ m$$

यह 4 sec में B द्वारा उतरी गई गहराई है

अतः सही उत्तर (A) है।

Ex.33 उदाहरण 31 में, यदि 4 sec बाद डोरी काट दी जाए तो, अगले 2 सेकण्ड में प्रत्येक कण की स्थिति क्रमशः होगी –

(A) 17.856 m, 21.344 m

(B) –21.344 m, 17.856 m

(C) –17.856 m, 21.344 m

(D) –17.856 m, –21.344 m

Sol.(C) 4 sec के अंत में डोरी काट दी जाती है। अब A व B परस्पर गुरुत्व के अधीन गिरने के लिए स्वतन्त्रा है, डोरी काटने के बाद A का वेग $= 0.872\ m/s$ (ऊपर की ओर) तथा त्वरण $a = -g$ (नीचे की ओर)

इस स्थिति से 2 sec में विस्थापन

$$h = ut + at^2 = (0.872) \times 2 + \frac{1}{2}(-9.8)\,2^2$$

$= 1.744 - 4.9 \times 4 = -17.856\ m$

शुरू से 4 sec के अंत तक तय स्थिति से A नीचे की ओर 17.856 m गिरता है। शुरू से 4 secके अंत तक तय स्थिति से B मुक्त रूप से गिरता है। इसकी स्थिति

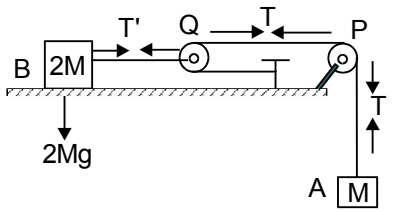
$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 = 0.872 \times 2 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4$$

$= 21.344\ m$

अतः सही उत्तर (C) है।

Example based on Motion of Masses Hanging from a Pulley, Lying on Horizontal Table.

Ex.34 चित्र में दिखाई गयी स्थिति में घिरनी तथा डोरियाँ घर्षण रहित तथा हल्की है। द्रव्यमान M का त्वरण डोरी PQ में तनाव, तथा क्लैम्प द्वारा घिरनी पर आरोपित बल क्रमशः होगें -



(A) (2/3)g, (1/3)Mg, ($\sqrt{2}$ /3)Mg

(B) (1/3)g, (1/3)Mg, ($\sqrt{2}$ /3)Mg

(C) (1/3)g, (2/3)Mg, $\sqrt{3}$ Mg

(D) 2g, (1/2)g, $\sqrt{2}$ Mg

Sol.(A) जैसे कि घिरनी Q स्थिर नहीं है, इसलिए यदि यह d दूरी गति करती है तो P तथा Q के बीच डोरी की लम्बाई बदलकर 2d हो जायेगी (d ऊपर से तथा d नीचे से) i.e. M, 2d दूरी तक गति करेगा। इससे ज्ञात होता है कि यदि $a(\rightarrow 2d)$M का त्वरण है, तो Q तथा 2M का त्वरण (a/2) होगा।

अब यदि हम द्रव्यमान M की गति पर विचार करते हैं तो यह नीचे की ओर त्वरित है

$T = M(g - a)$ ....(1)

तथा Q की गति के लिए

$2T - T' = 0 \times (a/2) = 0 \Rightarrow T' = 2T$ ...(2)

तथा द्रव्यमान 2M की गति के लिए

$T' = 2M\,(a/2) \Rightarrow T' = Ma$ ... (3)

समीकरण (2) व (3) से $T = \frac{1}{2}Ma$, अतः

अतः समीकरण (1) से

$$\left(\frac{1}{2}\right)Ma = M(g - a)$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

अतः द्रव्यमान M का त्वरण (2/3)g है

तथा डोरी PQ में तनाव समीकरण (1) से

$T = M\{g - (2/3)g\} = (1/3)Mg$

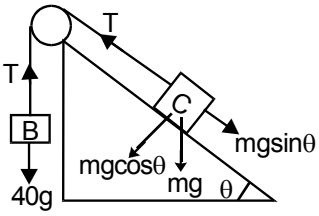
क्लैम्प द्वारा घिरनी पर आरोपित बल

$$= \sqrt{T^2 + T^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,Mg$$

अतः सही उत्तर (A) है।

Examples based on Motion of Masses Hanging from a Pulley, Lying on a Inclined Plane

Ex.35 एक द्रव्यमान हीन डोरी जो किसी नत समतल के चिकनी घिरनी से गुजरती है, के एक सिरे पर 50kg का द्रव्यमान नत समतल पर है, तथा दूसरे सिरे पर 40 kg का द्रव्यमान लटक रहा है, जैसे चित्रा में दिखाया गया है। 50 kg के द्रव्यमान द्वारा 4 sec में नीचे गिरने में तय दूरी होगी - (नत तल का झुकाव कोण 30° है)



(A) 13.04 m (B) 1.63 m
(C) 1.304 m (D) 16.3 m

Sol.(A) डोरी के दोनों भागों में तनाव समान होगा

B की समीकरण के लिए

$(40 \times 9.8 - T) = 40a$ ....(1)

C की समीकरण के लिए

$(T - 50 \times 9.8 \times \frac{1}{2}) = 50a$ .....(2)

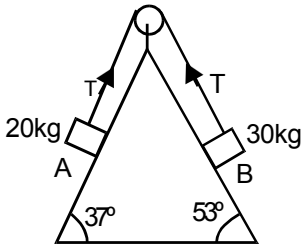
समीकरण (1) व (2) से

$a = 1.63\ m/s^2$

तय दूरी $S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 1.63 \times 4^2 = 13.04\ m$

अतः सही उत्तर (A) है।

Ex.36 30 kg व 20 kg द्रव्यमान की दो वस्तुऐं चित्राानुसार चिकनी सतह वाले भार पर दृढ़ किसी चिकनी घिरनी से गुजरने वाली डोरी के सिरों पर संलग्न है, डोरी में तनाव होगा



(A) 40.70 N (B) 164.64 N
(C) 1.22 N (D) 4.07 N

Sol.(B) डोरी द्रव्यमानहीन तथा अवितान्य है। अतः डोरी में तनाव T समान होगा, माना द्रव्यमान B नीचे की ओर गति करता है B की गति का समीकरण

$m_1g \sin\theta - T = m_1a$

$30 \times 9.8 \times \sin 53^\circ - T = 30a$

$\Rightarrow 235.2 \times T = 30\ a$ ....(1)

A की गति की समीकरण

$T - 20 \times 9.8 \times \sin 37^\circ = 20a$

$T - 117.6 = 20a$ ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) से $T = 164.64\ N$

अतः सही उत्तर (B) है।

:: याद रखने योग्य बिन्दु ::

1. न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार प्रत्येक वस्तु अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है। वस्तुओं का यह गुण जड़त्व कहलता है।

2. जड़त्व तीन प्रकार के होते है (i) विराम का जड़त्व (ii) गति का जड़त्व (iii) दिशा का जड़त्व

3. जड़त्व $\propto$ द्रव्यमान

4. रेखीय संवेग $\vec{p} = m\vec{v}$

5. न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार संवेग में परिवर्तन की दर आरोपित बल के बराबर होता है।

$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$

1 Newton = 10^5 dyne

6. न्यूटन के I व III नियम II नियम से प्राप्त किये जा सकते है। इस लिए द्वितीय नियम इन तीनो नियमों में से सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण है।

7. आवेग = $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = (\vec{p_1} - \vec{p_2})$

8. संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

प्रारम्भिक संवेग = अंतिम संवेग

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

9. रॉकेट पर प्रणोद बल $\vec{F} = \frac{\Delta M}{\Delta t}\vec{v} - M\vec{g}$ या $\vec{F} = \frac{\Delta M}{\Delta t}.\frac{\vec{v}}{M}$ गुरूत्व के उपस्थिति या अनुपस्थिति के अनुसार

10. रॉकेट का त्वरण $\vec{a} = \frac{\Delta M}{\Delta t}.\frac{\vec{v}}{M} - \vec{g}$ या

$\vec{a} = \frac{\Delta M}{\Delta t}.\frac{\vec{v}}{M}$ गुरूत्व के उपस्थिति या अनुपस्थिति के अनुसार

11. किसी वस्तु की संगामी बलों के अन्तर्गत साम्यावस्था हेतु

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + ...\vec{F_n} = 0$$

12. ऊपर की ओर त्वरित लिफ्ट में किसी वस्तु का आभासी भार $W = m (g + a)$.

13. नीचे की ओर त्वरित लिफ्ट में किसी वस्तु का आभासी भार $W = m (g – a)$

14. यदि लिफ्ट का नीचे की ओर त्वरण $a = g$, हो तो $W = 0$ i.e. वस्तु भारहीनता का अनुभव करेगी।

15. यदि वस्तु का त्वरण $a > g$, तो W ऋणात्मक होगा जिससे वस्तु लिफ्ट की छत तक उठेगी।