घूर्णन गतिकी

प्राक्कथन

दृढ़ पिण्ढ गति हालाँकि थोड़ी कठिन एवं शंका पैदा करने वाली प्रतित होती है लेकिन इस अध्याय में इसे इस प्रकार समझाया गया है कि यह समझने में आपको बहुत आसान लगेगी। इस अध्याय की शुरूआत करने के पहले आपको गति के मूल नियमों से परिचित होना आवश्यक है। इस अध्याय की समाप्ति के बाद आप निम्न बातों को समझने में समर्थ होगें

(i) दृढ़ पिण्ड की गति को आभास करने में

(ii) जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व एवं इसकी गणना

(iii) बल आघूर्ण जो कि घूर्णन गति का एक बहुत अहम अंग है

(iv) घूर्णन गति में उर्जा संरक्षण नियम।

(v) प्रश्नो को हल करने की तकनीक

आप पूरे अध्याय में दी गई Theory, उदाहरण व प्रश्नों को ध्यान पूर्वक करें। आप निश्चित रूप से AIEEE में आने वाले प्रश्नों को करने में सक्षम होगें।

यह पुस्तिका इस अध्याय में उपयोग होने वाली सभी संकल्पनात्मक (theory) तथा प्रायोगिक व्याख्याओं को सम्मिलित रखती है। प्रत्येक टॉपिक की थ्योरी के साथ उदाहरण दिये गये हैं। प्रत्येक टॉपिक के थ्योरी भाग के अन्त में सभी तरह के मिश्रित (miscellaneous) साधित (solved) उदाहरण दिये हुए हैं, जो इस अध्याय की सभी संकल्पनाओं के अनुप्रयोग को स्पष्ट करते हैं।

विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है, कि प्रत्येक विद्यार्थी इन सभी हल किये उदाहरणों को अवश्य पढ़ें, समझें ऐसा करने से इसे सम्बन्धित टॉपिक को अच्छी तरह समझने में मदद मिलेगी।

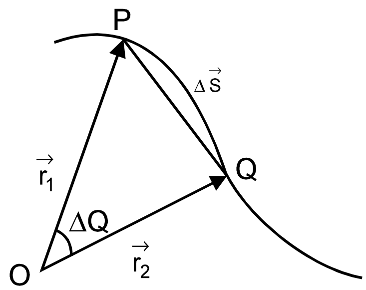
घूर्णन गतिकी में कुल प्रश्नों की संख्या है :

अध्याय में उदाहरण 29

दृष्टान्तीय उदाहरण 36

कुल प्रश्नों की संख्या 65

1. कोणीय विस्थापन



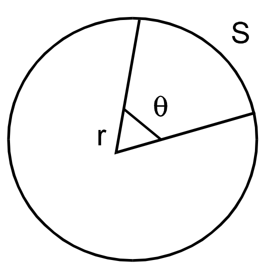
(a) जब कोई कण वक्राकार पथ पर गतिमान होता है तो किसी स्थिर बिन्दु के सापेक्ष इसका स्थिति सदिश जो कोण बनता है, इसे कोणीय विस्थापन कहते है।

(b) इसका मात्राक रेडियन होता है।

(c) इसकी विमा नहीं होती है। ($M^oL^oT^o$)।

(d) यह एक सादिश राशि है जिसकी दिशा दाये हाथ के पेच के नियम से दी जाती है।

(e) वृत्ताकार पथ में गति करने पर यदि कोणीय विस्थापन θ हो पथ की त्रिज्या r तथा चाप की लम्बाई S हो तो – $S = r\theta$



(f) $360^o = 2\pi$ radian

उदाहरण कोणीय विस्थापन पर आधारित

उदा.1 यदि एक कण किसी चक्र की परिधि पर $1\frac{1}{2}$ चक्कर लगाता है तो उसका कोणीय विस्थापन होगा –

(A) 0 (C) π
(C) 2π (D) 3π

हल. **(D)**

क्योकि $1\frac{1}{2}$ चक्कर $= 540^o$ विस्थापन

$\therefore\ 180^o = \pi$

कोणीय विस्थापन $= \frac{540}{180} \times \pi = 3\pi$

2. कोणीय वेग

(a) एंकांक समय में कोणीय विस्थापन को कोणीय वेग कहते है।

यदि कण को P से Q तक जाने में समय Δt हो तो

$$w = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

= तत्क्षणिक कोणीय वेग

$$\overline{\omega} = \frac{Q_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

= औसत कोणीय वेग

(b) मात्राक – Radian /sec होता है।

(c) विमा : $[M^oL^oT^{-1}]$ होती है जो आवृति के समान है।

(d) यह एक सदिश राशि है जिसकी दिशा घूर्णन तल के लम्बवत होती है।

एवं दिशा दाये हाथ के पेच के नियम से दी जाती है।

(e) वृत्ताकार पथ में गति कर रहे कण का कोणीय वेग ω, रेखीय

वेग v तथा पथ की त्रिज्या r में निम्न सम्बन्ध होता है

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

या $v = r\,\omega.$

(f) यदि f आवृति हो तो $\omega = 2f\pi$

यदि T आवर्तकाल हो तो

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

1.1 रेखीय गति तथा घूर्णन गति के समीकरण

रेखीय गति	घूर्णन गति
(1) यदि त्वरण शून्य हो तब v = नियतांक s = vt.	(1) यदि कोणीय त्वरण शून्य हो तो ω = constant $\theta = \omega t$.
(2) यदि त्वरण a = नियतांक हो तो –	(2) यदि कोणीय त्वरण नियंताक हो तो –
(i) $s = \frac{(u+v)}{2} t$	(i) $\theta = \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} t$
(ii) $a = \frac{v-u}{t}$	(ii) $\alpha = \frac{\omega_2-\omega_1}{t}$
(iii) $v = u + at$	(iii) $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$
(iv) $s = ut + 1/2\ at^2$	(iv) $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
(v) $v^2 = u^2 + 2as$	(v) $\theta = \omega_1^2 + 2 \alpha\theta$.
(vi) $S_{nth} = u + \frac{1}{2} a \times (2n-1)$	(vi) $\theta_{nth} = \omega_1 + (2n-1) \frac{\alpha}{2}$
(3) यदि त्वरण a = नियतांक नहीं हो तो उपरोक्त समीरकण प्रयुक्त नहीं होती है। तब –	(3) यदि कोणीय त्वरण नियंताक नहीं हो तो उपरोक्त समीरकण प्रयुक्त नहीं होती है। तब –
i) $v = \frac{dx}{dt}$	(i) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
ii) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	(ii) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
iii) $vdv = ads$	(iii) $\omega d\omega = \alpha d$

उदाहरण कोणीय गति पर आधारित

उदा.2 6 kg का एक पहिया 300 rpm. से चक्कर लगा रहा है। इसका कोणीय वेग होगा –

(A) 31.4 rad/sec (B) 3.14 rad/sec (C) 0.314 rad/sec (D) 0.0314 rad/sec

हल : (A)

यहाँ, $\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\times3.14\times300}{60} = 31.4$ rad/sec

उदा.3 यदि किसी वक्राकार पथ पर गति करते कण का कोणीय विस्थापन $\theta = 1.5\ t + 2t^2$, से दिया जाये तो t = 2 sec में कण का कोणीय वेग होगा (in rad/sec.) –

(A) 1.5 (B) 2.5 (C) 9.5 (D) 8.5

हल : (C) $\theta = 1.5\ t + 2t^2$, $\therefore \frac{d\theta}{dt} = 1.5 + 4t$,

अब, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{at\ t\ =\ 2\ sec} = 1.5 + 4 \times 2 = 1.5 + 8 = 9.5$ rad/sec.

3. कोणीय त्वरण ::

(a) कोणीय वेग में परिर्वतन की दर को कोणीय त्वरण कहते है।

(b) माना t_1 समय पर कोणीय वेग का मान $\vec{\omega}_1$ है तथा t_2 समय पर मान $\vec{\omega}_2$ हो तो

कोणीय त्वरण

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(c) यह एक सदिश राशि है जिसकी दिशा कोणीय वेग में परिर्वतन की दिशा में होती है।

(d) मात्राक – रेडीयन/ से.^{2}

विमा – $M^oL^oT^{-2}$

(e) कोणीय त्वरण $\vec{\alpha}$ व रेखीय त्वरण $\vec{a}$ मे निम्न सम्बन्ध होता है

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ or $a = \alpha r$

जहां a_T स्पर्श कोणीय त्वरण है।

(f) त्रिज्यीय त्वरण $\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$ इसकी दिशा त्रिज्या के अनुदिश होती है।

(g) कोणीय वेग त्वरण आदि सदिश जिनका सम्बन्ध घूर्णन अक्ष से होता है, अक्षीय सदिश कहलाते है।

उदाहरण कोणीय त्वरण पर आधारित

उदा.4 एक चकती विराम से धूमते हुए 10 sec. में 240 चक्कर प्रति मिनट का कोणीय वेग प्राप्त कर लेती है। कोणीय त्वरण होगा –

(A) 25.1 rad/sec^2 (B) 2.51 rad/sec^2
(C) 0.251 rad/sec^2 (D) 251 rad/sec^2

हल : (B)

$\omega_1 = 0$ rad/sec, $\omega_2 = 2\pi\ (240/60)$
$= 25.1$ rad/sec

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{25.1-0}{10}$$

$= 2.51$ rad/sec^2

उदा.5 10 sec. में पहिए का कोणीय वेग 1200 से 4500 rev./min. जाता है। इस समयान्तराल में कुल चक्करों की संख्या होगी –

(A) 475 (B) 425
(C) 450 (D) 950

हल : (A)

हम जानते हैं $\omega = \omega_0 + \alpha t$

यहॉ $\omega_0 = 1200/60 = 20$ rev/sec
$= 40\pi$ rad/sec

तथा $\omega = 4500/60 = 75$ rev./sec
$= 150\ \pi$ rad/sec

$\therefore\ 150\ \pi = 40\ \pi + \alpha\ (10)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(150-40)\pi}{10} = 11\ \pi \text{ rad/sec}^2$$

माना पहिए द्वारा इस समयान्तराल में बनाया गया कोण θ है, तो

$\theta = \omega_0 t + (1/2)\ \alpha t^2$
$= 40\pi \times 10 + (1/2) \times 11\pi\ (10)^2 = 950\ \pi$

चक्करो की संख्या n है।

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{950\pi}{2\pi} = 475$$

उदा.6 एक कार 72 km/hr. की चाल से गतिमान है, कार के पहिए का व्यास 0.50 m. है। यदि पहिए 20 चक्कर के बाद ब्रेक बल द्वारा रोके जाते है तो ब्रेक द्वारा उत्पन्न कोणीय मंदन होगा –

(A) 25.5 rad/s^2 (B) 2.55 rad/s^2
(C) 0.255 rad/s^2 (D) 255 rad/s^2

हल : (A)

कार की चाल,

$$v = 72 \text{ km/h} = \frac{72 \times 1000}{60 \times 60} = 20 \text{ m/s}$$

तथा पहिए की कोणीय चाल, $r = 0.25$ m.

इसलिए पहिये की कोणीय चाल,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20}{0.25} = 80 \text{ rad/s}$$

20 चक्कर बाद कोणीय विस्थापन,

$\theta = 2\pi \times 20 = 40\ \pi$ radian

From $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\ \alpha\ \theta$, से 0
$= (80)^2 + 2\ \alpha\ (40\pi)$

$\Rightarrow \alpha = -25.5$ rad/s^2.

उदा.7 विराम से घूमते हुए एक पहिये का कोणीय त्वरण 3.0 rad/sec^2 है। एक प्रेक्षक 4.0 sec में पहिए द्वारा बना कोण 120 रेडियन पाता है। प्रेक्षक के प्रेक्षण से कितने समय से पहिया घूम रहा था –

(A) 4 sec (B) 2 sec
(C) 8 sec (D) 6 sec

हल (C)

माना पहिये का कोणीय वेग ω_0 हैं, जब प्रेक्षक प्रेक्षण शुरू करता है।

अब, $\theta = \omega_0 t + (1/2)\,\alpha\, t^2$

मान रखने पर

$$120 = \omega_0 \times 4.0 + (1/2) \times 3.0 \times (4.0)^2$$

$\Rightarrow \quad \omega_0 = 24$ rad/sec

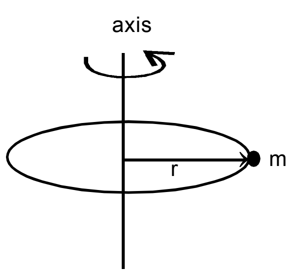
पुनः $\omega_0 = \omega_0' + \alpha t$ ----(1)

यहाँ, $\omega_0 = 24$ rad/sec ,

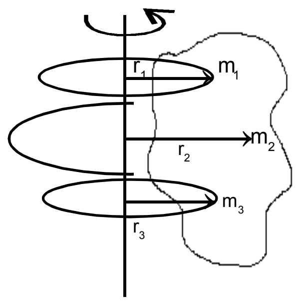
$\omega_0' = 0$ and $\alpha = 3.0$ rad/sec^2

$\therefore \quad t = 8.0$ sec. [from (1)]

4. जड़त्व आघूर्ण



घूर्णन अक्ष



घूर्णन अक्ष

(a) किसी अक्ष के चारो तरफ घूमती हुई वस्तु का वह गुण जो उसके घूर्णन गति में परिर्वतन का विरोध करे, वस्तु का उस घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कहलाता है।

(b) किसी कण का किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आधूर्ण कण के द्रव्यमान व उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होती है। अर्थात $I = mr^2$

(c) किसी निकाय का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष के जड़त्व आधूर्ण निकाय के प्रत्येक कण का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण के योग के बराबर होता है।

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \text{-------} = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

(d) जड़त्व आघूर्ण एक आदिश राशि है।

(e) मात्राक – M.K.S में – kg - m^2, C.G.S में – gm - cm^2

(f) विमा –$[M^1L^2T^0]$

(g) जड़त्व आघूर्ण का मान निम्न बातो पर निर्भर करता है –

(i) वस्तु के द्रव्यमान पर $[I \propto m]$

(ii) वस्तु के द्रव्यमान वितरण पर अर्थात वस्तु के आकृति आकार तथा घनत्व पर

(iii) घूर्णन अक्ष की स्थिति पर

नोट घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण जितना अधिक फैला होगा जडत्व आघूर्ण उतना अधिक होता है।

(h) जड़त्व आधूर्ण का मान निम्न पर निर्भर नहीं करता है –

(i) कोणीय वेग (ω) पर

(ii) कोणीय त्वरण (α) पर

(iii) बल आघूर्ण (τ) पर

(vi) कोणीय संवेग (J) पर

4.1 घूर्णन त्रिज्या

(a) घूर्णन अक्ष से वह दूरी जहाँ पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्रित मान लेने पर जड़त्व आधूर्ण का मान वही प्राप्त होता है, जो पिण्ड के द्रव्यमान के वास्तविक वितरण से प्राप्त होता है। इस दूरी को घूर्णन त्रिज्या या परिभ्रमण त्रिज्या कहते है।

(b) एक ही पिण्ड में परभ्रिमण त्रिज्या अलग–अलग अक्ष के लिए अलग–अलग होती है।

(c) यदि वस्तु की घूर्णन त्रिज्या K हो तो –

$$I = mK^2$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 r_2^2 + ---m_n + r_n^2}{m_1 + m_2 + ---+ m_n}}$$

(d) समांगी पिण्ड के लिए घूर्णन त्रिज्या समस्त कणों की घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के माध्य के वर्गमूल के बराबर होती है।

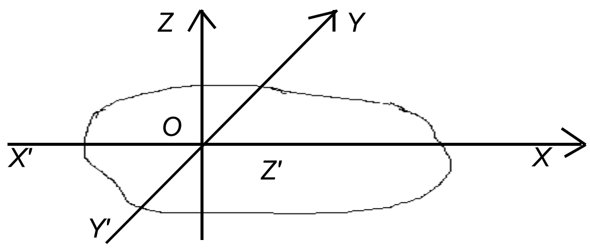
अर्थात $m_1 = m_2 = \text{-----------}\ m_n$

तब $K = \sqrt{\dfrac{r_1^2 + r_2^2 + -----+ r_n^2}{n}} = r_{rms}$

(e) घूर्णन त्रिज्या का मान अक्ष की स्थिति व उसके सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर होता है।

(f) घूर्णन त्रिज्या वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती हैं।

4.2 जड़त्व आघूर्ण के प्रमेय :

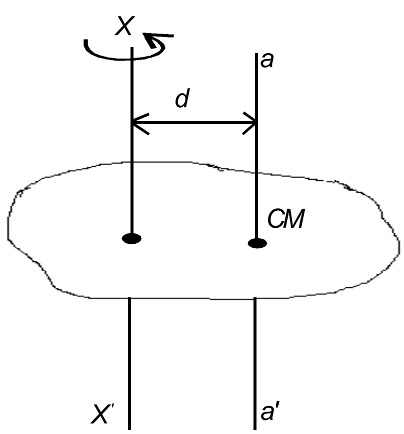


1) ***समकोणिक अक्षो का प्रमेय :—***

इसके अनुसार किसी समतल पटल का इसके पटल के लम्बवत् किसी अक्ष OZ के प्रति जड़त्व आघूर्ण का मान पटल के तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत् अक्षो (OX तथा OY) के सापेक्ष जड़त्व आधूर्णो के योग के बराबर होता है, जबकि अभिलम्ब अक्ष OZ दोनो लम्बवत् अक्षों ox व oy के कटान बिन्दु से गुजरे $I_{ZZ'} = I_{xx'} + I_{yy'}$

नोट :— यह प्रमेय सिर्फ समतल पटल के लिए ही उपयुक्त है।

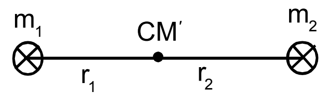
2) ***समान्तर अक्षो का प्रमेय :—***



इस प्रमेय के अनुसार ''वस्तु का किसी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उसके द्रव्यमान केन्द्र से पारितः समान्तर अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण तथा वस्तु के द्रव्यमान व अक्षो के बीच की दूरी के वर्ग के गणुनफल योग के बराबर होता है।

$$I_{xx'} = I_{cm} + Md^2$$

4.3 दो बिन्दु द्रव्यमानों का उनके द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष



माना m_1 व m_2 दो बिन्दु है, जिनके बीच की दूरी r है। इनके द्रव्यमान केन्द्र की m_1 से दूरी r_1 व m_2 से दूरी r_2 है।

i) $r_1 + r_2 = r$

ii) $m_1 r_1 = m_2 r_2$

iii) $r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}$

$r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}$

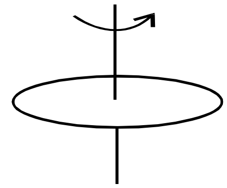
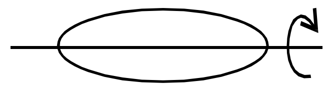
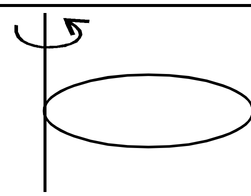
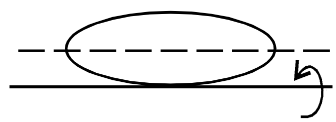
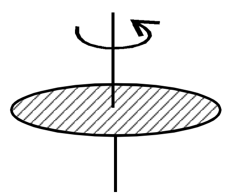
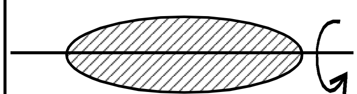
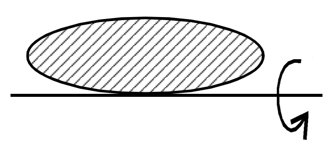
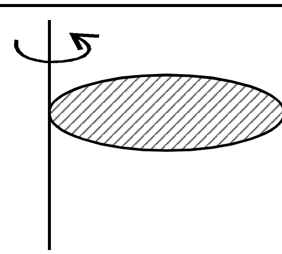
iv) $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

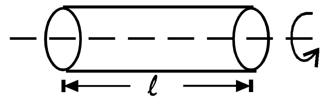
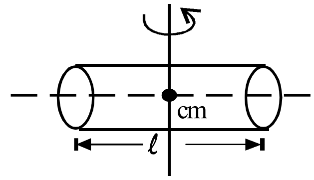
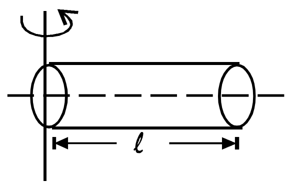
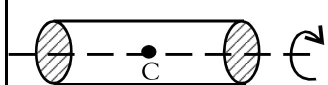
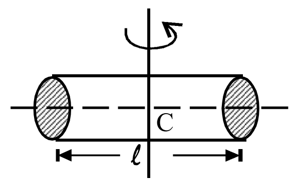
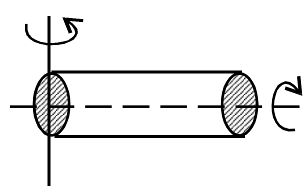
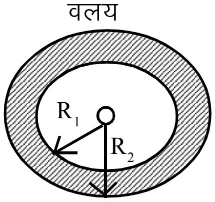
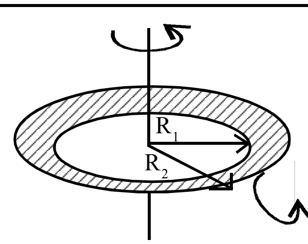
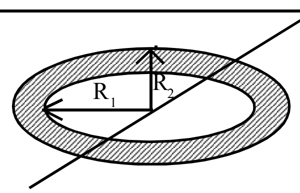
v) $I = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) r^2 = \mu r^2$

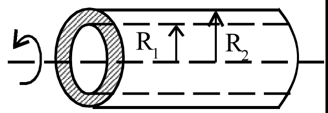
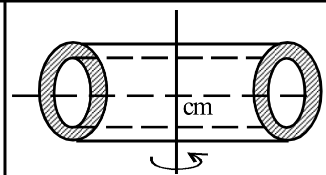
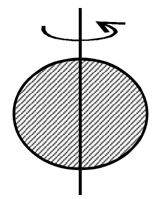
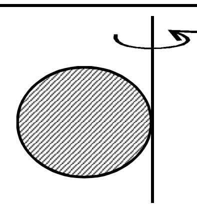
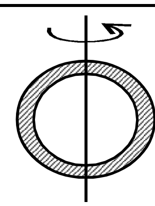
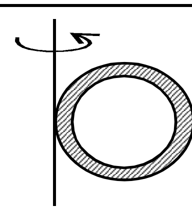
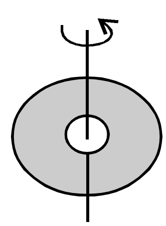
जहाँ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, समानीत द्रव्यमान कहते है।

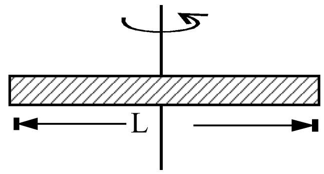
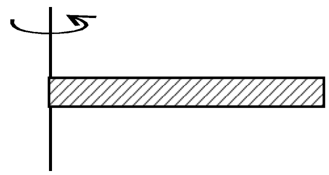
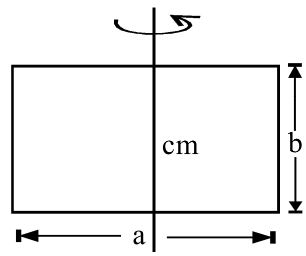
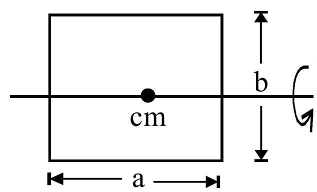
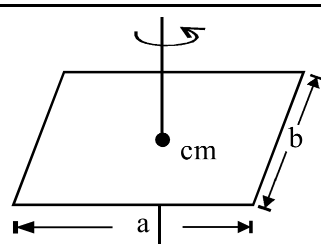
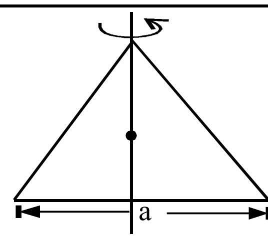
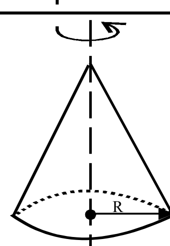
vi) द्वि–परमाणु अणु जैसे H_2, HCl इत्यादि का उनके द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उपरोक्त सूत्रा से ही निकाला जाता है।

कुछ नियमित आकार के पिण्डों के जड़त्व आघूर्ण

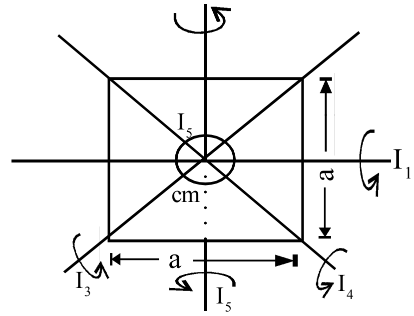
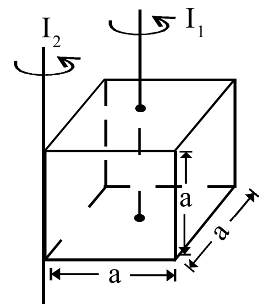
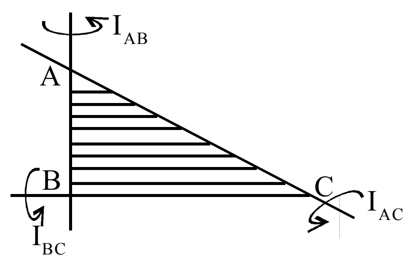
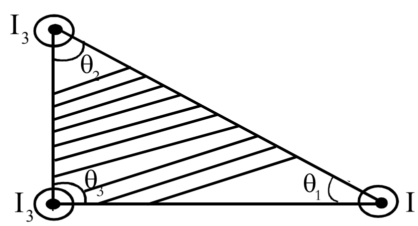
Shape of body वस्तु की आकृति	Axis of Rotation घूर्णन अक्ष की स्थिति	Figure	Moment of Inertia (I)	Radius of Gyration (K)
(1) Circular Ring वृताकार वलय M:- Mass R:- Radius	1) Passes through the centre and perpendicular to the plane केन्द्र से पारित तल के लम्बवत		MR^2	R
	2) About its Diameter in its own plane व्यास के सापेक्ष या केन्द्र से पारित व तल में		$(1/2)MR^2$	$R/\sqrt{2}$
	3) About a tangential axis perpendicular to its own plane. तल के लम्बवतस्पर्श रेखीय अक्ष		$2MR^2$	$\sqrt{2}\,R$
	4) About a tangential axis in its own plane तल में स्थित स्पर्श रेखीय अक्ष		$\frac{3}{2}MR^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}}.R$
(2) Circular disc वृताकार चकती M:- Mass R:- Radius	1) Passing through the centre and perpendicular to the plane केन्द्र से पारित तल से लम्बवत		$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
	2) About Diameter केन्द्र से पारित व तल में अथवा व्यास के सापेक्ष		$MR^2/4$	$\frac{R}{2}$
	3) About a tangential axis lying in its own plane. तल में स्पर्श रेखीय अक्ष		$\frac{5}{4}MR^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}R$
	4) About a tangential axis Perpendicular to its own plane तल के लम्बवत् स्पर्श रेखीय अक्ष		$\frac{3}{2}MR^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}}.R$

3) Hollow Cylinder खोखला बेलन M = Mass R = Radius L = Length	a) about its geometrical axis ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष केन्द्र से पारित अक्ष के समान्तर		MR^2	R
	b) about an axis passing through its CM and perpendicular to its length केन्द्र से पारित व लम्बाई के लम्बवत्		$\sqrt{\frac{R^2}{2}+\frac{\ell^2}{12}}$	
	c) about an axis perpendicular to its length and passing through one end of the cylinder लम्बाई के लम्बवत व एक सिरे से पारित अक्ष		$\sqrt{\frac{R^2}{2}+\frac{\ell^2}{3}}$	
(4) Solid Cylinder ठोस बेलन M:- Mass R:- Radius L:- Length	A) About its geometrical Axis ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष (केन्द्र से पारित व अक्ष के समानान्तर)		$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
	B) About an axis passing through its C.G.and Perpendicular to its axis केन्द्र से पारित व अक्ष के लम्बवत		$\frac{MR^2}{4}+\frac{M\ell^2}{12}$	$\sqrt{\frac{R^2}{4}+\frac{\ell^2}{12}}$
	C) About the diameter of one of the faces of the cylinder and perpendicular to the length . लम्बाई के लम्बवत व एक पृष्ठ के व्यास से पारित		M $\sqrt{\frac{R^2}{2}+\frac{\ell^2}{3}}$	
(5) Annular disk वलय 	A) Passing through centre and perpendicular to the plane केन्द्र से पारित अक्ष तल से लम्बवत		$\frac{M}{2}[R_1{}^2 + R^2{}_2]$	$\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}$
M:- Mass, R_1 : आन्तरिक त्रिज्या R_2 : बाहरी त्रिज्या	B) About its diameter केन्द्र से पारित व तल में अर्थात् व्यास के सापेक्ष		$\frac{M[R_1^2+R_2^2]}{4}$	$\frac{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}{2}$

(6) Hollow Cylinder खोखला बेलन R_1 : Internal Radius R_2 :- Outer Radius M :- Mass व L :- Length.	1) About geometrical Axis or about the Axis which is passing through centre ज्यामितीय अक्ष (लम्बाई के समान्तर) केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष		$\frac{M(R_1^2+R_2^2)}{2}$	$\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}$
	2) Passing through centre of mass and perpendicular to its length द्रव्यमान केन्द्र से पारित व ज्यामितीय अक्ष के लम्बवत		$M\sqrt{\frac{L^2}{12}+\frac{R_1^2+R_2^2}{4}}$	
(7) Solid Sphere ठोस गोला M:- Mass R:- Radius	A) About its axis OR diameter, which is passing through centre. केन्द्र से पारित अक्ष या व्यास के समान्तर		$\frac{2}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}.R$
	B) About Tangential स्पर्श रेखीय अक्ष		$\frac{7}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{7}{5}}.R$
(8) Thin Spherical Shell पतला गोलीय कोश (खोखला गोला)	1) Passing through axis or diameter.		$\frac{2}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}.R$
(Hollow Sphere) M : Mass R : Radius Thickness negligible मोटाई – नगण्य	2) About Tangential Axis केन्द्र से पारित अक्ष या के सापेक्ष		$\frac{5}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{5}{3}}.R$
(9) Solid sphere with cavity मोटा गोलीय कोश Internal radius = r Outer Radius = R Mass :- M	About passing through centre OR about diameter केन्द्र से पारित अक्ष या व्यास के सापेक्ष		$\frac{2}{5}M\frac{[R^5-r^5]}{[R^3-r^3]}$	$\sqrt{\frac{2}{5}\frac{(R^5-r^5)}{(R^3-r^3)}}$

(10) Thin rod पतली छड़ [thickness is negligible w.r.t. length] [लम्बाई के सापेक्ष मोटाई नगण्य]	1) Passing through centre of mass and perpendicular to length द्रव्यमान केन्द्र से पारित व लम्बाई के लम्बवत		$\frac{ML^2}{12}$	$\frac{L}{2\sqrt{3}}$
	2) Passing through its one end and perpendicular to Axis एक सिरे से गुजरने वाले लम्बाई के लम्बवत.		$\frac{ML^2}{3}$	$\frac{L}{\sqrt{3}}$
(11) Rectangular plate आयाताकार परत a = Length b = width चौड़ाई M = Mass	(a) about an axis passing through CM and perpendicular to side a in its plane . द्रव्यमान केन्द्र से पारित भुजा a के लम्बवत अक्ष तल में		$\frac{Ma^2}{12}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$
	(b) about an axis passing through CM and perpendicular to side b in its plane. द्रव्यमान केन्द्र से पारित भुजा b के लम्बवत अक्ष तल में		$\frac{Mb^2}{12}$	$\frac{b}{2\sqrt{3}}$
	c) about an axis passing through CM and perpendicular to plane द्रव्यमान केन्द्र से पारित तल के लम्बवत अक्ष		$\frac{M(a^2+b^2)}{12}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$
(12)Tringular Prism त्रिभुजाकार प्रिज्म Side of base is (a) and height (a)	1) Passing through centre of mass and perpendicular triangular face द्रव्यमान केन्द्र से पारित एवं त्रिभुजाकार फलक		$\frac{Ma^2}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$
(13) Cone शंकु: Radius :- R height :- h.	1) About the line joining of top of the cone and mid . point of base शंकु के शीर्ष व समतल पृष्ठ के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा के सापेक्ष		$\frac{3}{10}MR^2$	$\sqrt{\frac{3}{10}} \times R$

महत्वपूर्ण बिन्दु

(a)	Moment of inertia of square plate वर्गाकार प्लेट का जड़त्व आघूर्ण	$I_1 = I_3 = I_4 = \dfrac{Ma^2}{12}$ $I_5 = \dfrac{Ma^2}{6}$	
(b)	Momentum of inertia of cube घन का जड़त्व आघूर्ण	$I_1 = \dfrac{Ma^2}{6}$ $I_2 = \dfrac{2Ma^2}{3}$	
(c)	In a triangle , M.I. will be maximum relative to smallest side. त्रिभुज में जो भुजा सबसे छोटी होती है उसके सापेक्ष MI सबसे ज्यादा होता है।	If AC > B C > AB, $I_{AC} < I_{BC} < I_{AB}$	
(d)	In triangle , M.I. will be maximum relative to that perpendicular axis which passes through least angle. त्रिभुज में जो कोण सबसे छोटा होता है उससे पारित तल के लम्बवत अक्ष के सापेक्ष MI सबसे ज्यादा हेाता है।	If $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ $I_1 > I_2 > I_3$	
(e)	Greater the mass away from axis of rotation , more will be MI. जितना द्रव्यमान घूर्णन अक्ष से दूर जाएगा MI अधिक होगा।		

उदाहरण जड़त्व आघूर्ण पर आधारित

उदा.8 यदि किसी ठोस गोले की त्रिज्या 35 cm. है। घूर्णन त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा, अब घूर्णन अक्ष क्रमशः व्यास के अनुदिश तथा स्पर्श रेखा के अनुदश है –

(A) $\sqrt{\frac{10}{35}}$ (B) $\sqrt{\frac{35}{10}}$

(C) $\frac{7}{1}$ (D) $\frac{1}{7}$

हल : (A)

व्यास के अनुदिश,

$I_g = (2/5)\ mR^2$ or $K_g^2 = (2/5)\ R^2$

or $K_g = R\sqrt{\frac{2}{5}} = 35\sqrt{\frac{2}{5}} = 7\sqrt{10}$ cm

स्पर्श रेखा के अनुदिश,

$I = Ig + mR^2$

$\therefore\ mK^2 = mK_g^2 + mR^2$ or K^2

$= K^2_g + R^2 = (2/5)\ R^2 + R^2 = (7/5)\ R^2$

$K = R\sqrt{\frac{7}{5}} = 35\sqrt{\frac{7}{5}}$, अब $\frac{K_g}{K} = \sqrt{\frac{10}{35}}$

उदा.9 किसी पहिये के व्यास में 1% की वृद्धि की जाती है। पहिए के अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण में प्रतिशत वृद्धि होगी –

(A) 1 % (B) 2%
(C) 3% (D) 4%

हल : (B)

पहिये का जड़त्व आघूर्ण,

$I = MR^2$

log लेने पर $I = \log M + 2 \log R$

अवकलन करने पर,

$$\frac{dI}{I} = 0 + 2\,\frac{dR}{R}$$

$\therefore$ जड़त्व आघूर्ण में % वृद्धि

$$= \frac{dI}{I} \times 100 = 2 \times 1\% = 2\%$$

उदा.10 किसी गोले का व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण 20 kg-m^2 है। गोले के सपर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा –

(A) 70 kg-m^2 (B) 35 kg-m^2
(C) 50 kg-m^2 (D) 20 kg-m^2

हल : (A)

समान्तर अक्षों की प्रमेय से,

$I = I_G + Ma^2 = \frac{2}{5}\ MR^2 + MR^2\ (\because\ a = R)$

$= \frac{7}{5}\ MR^2$

दिया हैं $\frac{2}{5}\ MR^2 = 20$ or $MR^2 = \frac{20\times5}{2} = 50$,

$\therefore\ I = \frac{7}{5}\times 50 = 70$ kg-m^2

उदा.11 किसी डिस्क का इसके पृष्ट के समान्तर स्पर्श रेखा से परितः जड़त्व आघूर्ण है। इसके पृष्ट के लम्बवत् स्पर्श रेखा के परित जड़त्व जाधूर्ण होगा –

(A) $\frac{6}{5}I$ (B) $\frac{3}{4}I$

(C) $\frac{3}{2}I$ (D) $\frac{5}{4}I$

हल : (A)

समान्तर अक्षों की प्रमेय से, पृष्ट के समान्तर स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आधूर्ण

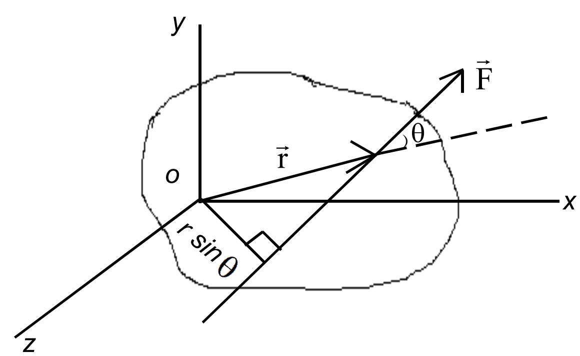
$$I = I_{||} = \frac{MR^2}{4} + MR^2 = \frac{5}{4}\ MR^2$$

पृष्ठ के लम्बवत् स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आधूर्ण

$$I' = I_{\perp} = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}\ MR^2$$

$$= \frac{6}{5}\left[\frac{5}{4}MR^2\right] = \frac{6}{5}\ I$$

5. बल आघूर्ण



a) बिन्दु O के सापेक्ष बल F का बल आघूर्ण, बल F तथा बल के क्रिया रेखा की बिन्दु O से लम्बवत्

दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।

τ = (बल) × (बल की क्रिया रेखा की बिन्दु O से लम्बवत् दूरी

$= Fr\sin\theta = (F\sin\theta)\, r$

= (बल का स्थिति सदिश के लम्बवत घटक) × (स्थिति सदिश)

$\therefore$ $\tau = Fr\sin\theta$ मात्राक M.K.S में N-M, C.G.S में dyne-cm तथा

विमा ML^2T^{-2} (कार्य की विमा के समान)

b) $r\sin\theta$ को लीवर भुजा भी कहते है।

c) सदिश रूप में, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= rF\sin\theta\,\hat{n}$

जहाँ θ, $\vec{r}$ व $\vec{F}$ के मध्य कोण है।

$\hat{n}$, $\vec{r}$ व $\vec{F}$ के तल के लम्बवत् इकाई सदिश है।

d) बल आघूर्ण एक सदिश है जिसकी दिशा बल व स्थिति सदिश के तल से लम्बवत होती है, तथा यह दायें हाथ के पेच के नियम से दी जाती है।

e) यदि बल आघूर्ण, पिण्ड को वामावर्त घुमाने की प्रकृति रखे, तो बल आघूर्ण धनात्मक होता है, तथा यदि दक्षिणावर्त घुमाने के प्रकृति रखे, तो बल आधूर्ण ऋणात्मक होता है।

f) यदि पिण्ड पर एक से अधिक बल कार्यरत हो, तो कुल बल आघूर्ण अलग अलग बल आधूर्ण के सदिश योग के तुल्य होता है।

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_2$ +-----------+ $\vec{\tau}_n$

g) $\tau = I\alpha$

जहाँ I - घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

α - घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय त्वरण

τ - उस बल का बल आघूर्ण जिसकी वजह से घूर्णन गति होती है।

h) $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{J}}{dt}$, जहॉ, $\vec{J}$ – कोणीय संवेग है।

i) r का मान जितना अधिक होगा, बल आधूर्ण का मान उतना ही अधिक होगा तथा पिण्ड को घुमाना उतना ही आसान होगा। घुमाने के लिए हमे बल कम लगाना होगा।

उदाहरण :

i) पेचकस का हत्था मोटा लिया जाता है।

ii) गांवो में घरेलू आटा चक्की मे हेंडील परिधि के नजदीक होता है।

iii) कुम्हार की चाक को घुमाने के लिए चाक का लकड़ी को फंसाने का गड्डा परिधि के पास होता है।

iv) हेन्डपम्प का हत्था लम्बा रहता है।

v) खिड़की या दरवाजे पर हैडिल कब्जे से दूर लगाये जाते है।

vi) नल खोलने के लिए प्रयुक्त रिंच का हत्था लम्बा लिया जाता है।

j) बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य = $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$ = बल आघूर्ण × कोणीय विस्थापन

उदाहरण बल आघूर्ण पर आधारित

उदा.12 दिया है, $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ तथा $\vec{F} = 2\hat{i} + 6\hat{k}$. तो बल आघूर्ण का मान होगा –

(A) $\sqrt{405}$ N.m. (B) $\sqrt{410}$ N.m.

(C) $\sqrt{504}$ N.m. (D) $\sqrt{510}$ N.m.

हल : (C)

हम जानते हैं , $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\Rightarrow \vec{\tau} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (2\hat{i} + 6\hat{k})$

$= 12(-\hat{j}) + 6(-\hat{k}) + 18\hat{i}$

$= -12\hat{j} - 6\hat{k} + 18\hat{i}$

[Note : $\hat{i} \times \hat{i} = 0$, $\hat{i} \times \hat{j} = k$, $\hat{j} \times \hat{i} = -k$ etc.]

अब $|\vec{\tau}| = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2 + (18)^2}$

$= \sqrt{144 + 36 + 324} = \sqrt{504}$

उदा.13 एक नियत बल आघूर्ण किसी एक समान वृत्तीय चक्र A_0 से $4A_0$, 4 सेकण्ड़ में कर दे, तो बल–आघूर्ण का मान होगा –

(A) $3A_0/4$ (B) A_0

(C) $4A_0$ (D) $12A_0$

Sol. **(A)**

$\Delta J = 4A_0 - A_0 = 3A_0$ तथा $\Delta T = 4$

$\therefore \tau = \dfrac{\Delta J}{\Delta T} = \dfrac{3A_0}{4}$

उदा.14 एक पहिए का जड़त्व आघूर्ण 1000 kg-m^2. है। किसी क्षण इसका कोणीय वेग 10 rad/s है। 100 radians का कोण घूमने के बाद पहिए का कोणीय वेग 100 rad/sec. हो जाता है। पहिये पर लगने वाला बल आघूर्ण होगा –

(A) 4.95×10^5 N.m (B) 4.95×10^4 N.m
(C) 4.95×10^3 N.m (D) 49.5×10^5 N.m

हल : (B)

हम जानते है $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\alpha\,\theta$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{(100)^2 - (10)^2}{2 \times 100}$$

$= 49.5$ rad/s^2

$\tau = I\,\alpha = 1000 \times 49.5 = 4.95 \times 10^4$ N-m.

उदा.15 जब एक पहिया 1800 चक्कर/मिनट की चाल से घूमता है। तो एक स्वचालित इंजन 100 kilo-watt शक्ति उत्पन्न करता है। इसके द्वारा उत्पन्न बल–आघूर्ण होगा –

(A) 60 N-m (B) 531 N-m
(C) 5.31 N-m (D) 6.0 N-m

हल. (B)

बल आघूर्ण τ द्वारा दी गई शक्ति

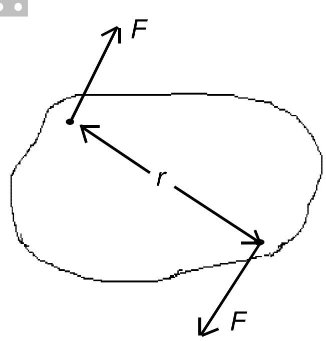
$$P = \tau\omega \text{ or } \tau = \frac{P}{\omega}$$

यहाँ P = 100 KW = 100, 000 Watt

$$\omega = \left(\frac{1800}{60}\right) \times 2\pi = 60\,\pi \text{ rad/sec,}$$

$$\tau = \frac{10^5}{60 \times 3.14} = 531 \text{ N.m}$$

6. बल युग्म



a) जब समान परिमाण के दो बल किसी पिण्ड पर विपरीत दिशाओं में अलग अलग बिन्दुओं पर कार्य करते है, तो यह बल मिलकर बल युग्म बनाते है।

b) बल युग्म का प्रभाव उसके आघूर्ण से जाना जाता है।

c) बल युग्म के आघूर्ण का मान, किसी एक बल के परिमाण तथा दोनो बलों के बीच की लम्बवत दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।

बल युग्म का आघूर्ण = (F) (r)

d) बल युग्म के कारण पिण्ड में घूर्णन गति उत्पन्न होती है।

e) बल युग्म व बल आघूर्ण सामान्यतः एक ही होते है। जब आरोपित बल एक होता है तब इसकी प्रतिक्रिया बल इसके साथ बल आघूर्ण बनाता है।

f) बल युग्म द्वारा पिण्ड पर किया गया कार्य, बल आघूर्ण द्वारा किए गए कार्य के बराबर ही होता है।

$\therefore$ बल युग्म द्वारा किया गया कार्य = बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य $= \int \tau\, d\theta$

g) यदि बल युग्म या बल आघूर्ण के प्रभाव में कण n घूर्णन कर ले तो किया गया कार्य

$W = \tau \ (2\pi n)$

h) जिस प्रकार से स्प्रिंग को खीचने पर उसमें ऊर्जा संचित होती है, उसी तरह से किसी तार को ऐंठने पर उसमें भी बल आघूर्ण द्वारा कार्य होता है तथा यह कार्य उसमें ऊर्जा के रूप में संचित जाता है।

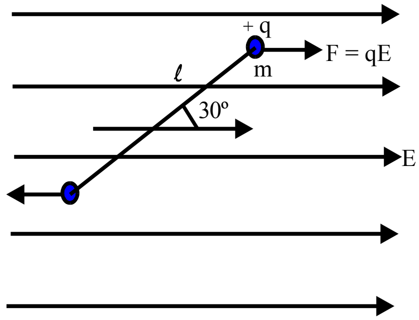
$$w = \int_0^{\theta} C\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\, C\theta^2$$

$\tau = C\theta$ (प्रत्यानयन बल आघूर्ण)

जहाँ C = ऐंठन नियतांक

उदाहरण **बल युग्म पर आधारित**

उदा.16 दो गोले जिनका भार m है, और जिन पर आवेश क्रमशः +q एवं –q है एक छड़ जिसकी लंबाई ℓ है, के दोनो कोनो पर जुड़े है। यदि यह छड़ एक विद्युत क्षेत्रा में रखी है और उस क्षेत्रा से 30° का कोण बना रही है तो छड़ के केन्द्र पर कार्य कर रहे बल युग्म का मान होगा –



(A) q ℓ E (B) q ℓ E/2

(C) qE (D) 2 q ℓ E

हल **(B)**

बल युग्म = किसी एक आवेश पर बल x दोनों आवेश के बीच की लम्बवत् दूरी

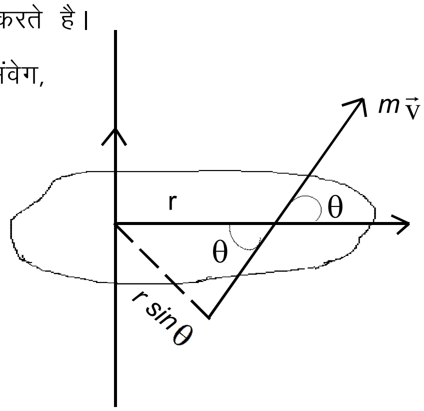
$\tau = qE \times \ell \sin 30^o = \frac{qEl}{2}$

7. कोणीय संवेग :

a) किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष किसी कण के रेखीय संवेग के आघूर्ण को कोणीय संवेग कहते है।

b) यह एक सदिश राशि है जिसे प्रायः $\vec{L}$ या $\vec{J}$ से प्रदर्शित करते है।

c) कोणीय संवेग,



$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$

$= \vec{r} \times (m\vec{v})$

$= m(\vec{r} \times \vec{v})$

या $\vec{J} = rp \sin\theta\, \hat{n}$

$= mvr \sin\theta\, \hat{n}$

θ, $\vec{r}$ व $\vec{v}$ के मध्य कोण है।

$\hat{n}$, $\vec{r}$ व $\vec{v}$ के तल के लम्बवत इकाई सदिश है।

d) कोणीय संवेग की दिशा $\vec{r}$ व $\vec{v}$ के तल के लम्बवत होती है तथा यह दायें हाथ के पेच के नियम से दी जाती है।

e) $J = mvr \sin\theta$

स्थितियाँ

(I) यदि $\theta = 0$ J = 0 (न्यूनतम)

(II) यदि $\theta = 90$ J = mvr (अधिकतम) = $(mr^2)\,\omega$

$\because \quad v = r\omega$

f) मात्राक – J - second , kg m^2/s, kg m^2 rad/ sec.

g) विमा $[M^1L^2T^{-1}]$

h) यदि घूर्णन दिशा वामावर्त हो, तो कोणीय संवेग धनात्मक तथा घूर्णन दिशा दक्षिणावर्त होने पर कोणीय संवेग ऋणात्मक लिया जाता है।

i) अनेक कणो से बने निकाय का कुल कोणीय संवेग, अलग अलग कण के कोणीय संवेग के सादिश योग के बराबर होता है।

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 + \text{---------}$$

j) कोणीय संवेग व घूर्णन वेग में सम्बन्ध

$J = I\omega$

I - घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण

ω - कोणीय संवेग के कारण घूर्णन वेग

J - उस संवेग का आघूर्ण जिसकी वजह से घूर्णन होता है।

k) कोणीय संवेग में परिर्वतन की दर पर लग रहे बल आघूर्ण के बराबर है।

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

l) घूर्णन गति में, कोणीय संवेग का वही महत्व होता है जो रेखिक गति में रेखीय संवेग का होता है।

m) यदि कण पर लग रहा बल आघूर्ण $\vec{\tau} = 0$ हो, तो $\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$ इस स्थिति में कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

7.1 कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त :

a) यदि किसी अक्ष के परितः घूमते हुए पिण्ड पर कोई बाह्य बल आघूर्ण कार्य न कर रहा हो, तो उस पिण्ड का कोणीय संवेग नियत रहता है,

अर्थात् $J = I\omega$ = नियतांक

b) उत्पत्ति :— हम जानते हैं कि किसी पिण्ड के कोणीय संवेग परिवर्तन की दर पर आरोपित बल आघूर्ण के बराबर होता है।

अत : $\frac{dJ}{dt} = \tau$ यदि, $\tau = 0$ तो $\frac{dJ}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ J = नियंताक

यह कोणीय संवेग सरंक्षण का नियम है

उदाहरण :

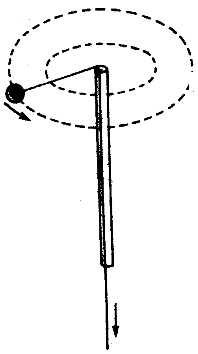


fig. (1)

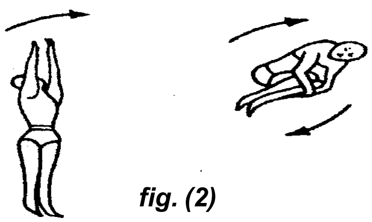


fig. (2)

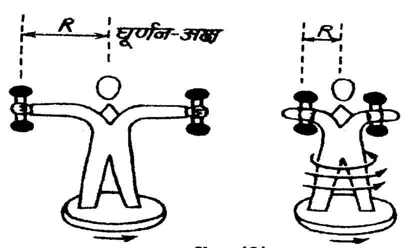


fig. (3)

i) मान लो हम किसी लम्बे धागे के एक सिरे पर गेंद बांधकर धागे के दूसरे सिरे को एक उर्ध्व नली में से गुजाकर हाथ में पकड लेते हैं, तथा दूसरे हाथ से नली को पकडकर गेंद को क्षेतिज वृत्त में घुमा रहे हैं, यदि हम धागे को नीचे की ओर खींचकर गेंद के वृत्तीय पथ की त्रिज्या को छोटा कर दें तो गेंद पहले से अधिक तेजी से घूमने लगती है। इसका कारण यह है कि वृत्त की त्रिज्या घटने से गेंद का घूर्णन अक्ष के परितः जडत्व आघूर्ण घट जाता है। अतः संवेग संरक्षण के नियमानुसार, गेंद का कोणीय वेग बढ जाता है।

ii) जब कोई तैराक ऊपर से जल में कूदता है, तो वह सीधे कूदने केबजाय, अपने शरीर को मोड लेता है। इससे उसके शरीर का जड़त्व आघूर्ण I घट जाता है परन्तु I ω का मान नियत रहता है, अतः I के घटने से कोणीय वेग बढ़ जाता है। अब वह कूदने के दौरान वायु में घूर्णन ले लेता है।

iii) चित्र में, एक व्यक्ति अपनी भुजाओं को फैलाकर अपने हाथों में भारी डम्बल लिये एक घूमते हुए स्टूल पर खड़ा है। जब वह व्यक्ति अपनी भुजाओं को समेट लेता है तो तुरन्त स्टूल की गति तेज हो जाती है। कारण यह है कि भुजाओं को समेट लेने पर डम्बलो की घूर्णन अक्ष से दूरी R घट जाती है जिससे व्यक्ति का जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है। अतः कोणीय वेग बढ़ जाता है। भुजाओं को पुनः फैला देने पर स्टूल की गति पुनः धीमी हो जाती है। इसी प्रकार, बर्फ पर स्केटिंग करने वाले अपनी भुजाओ को फैलाकर व मोड़कर स्केटिंग की गति बदलते है।

उदाहरण कोणीय संवेग पर आधारित

उदा.17 यदि M भार एवं r त्रिज्या वाली पतली वृत्ताकार वलय यदि अपने केन्द्र से पारित तल के लम्बवत् घूम रही हैं। (घूर्णन गति अपरिवर्तनीय हैं) । दो गोले जिनमें प्रत्येक का भार m है। वलय के व्यास के दोनो सिरो पर धीरे से जोड़े जाते है। तो वलय की नई कोणीय गति होगी –

(A) $\frac{\omega(M-2m)}{M+2m}$ (B) $\omega M\ (M - m)$

(C) $\frac{\omega(M+2m)}{M}$ (D) $\frac{\omega M}{M+2m}$

हल : (D)

यहॉ कोणीय संवेग के संरक्षण का सिद्धान्त लागू होगा

$J = I_1\ \omega_1 = I_2\omega_2$

$MR^2\omega = (MR^2 + mR^2 + mR^2)\ \omega_2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{M\omega}{M+2m}$

उदा.18 किसी खेल के मैदान में मेरी–गो राउन्ड का द्रव्यमान 120 kg त्रिज्या 4m तथा घूर्णन त्रिज्या 3m है। 30 kg द्रव्यमान का एक बालक परिधि पर स्पर्श रेखा के अनुदिश 5 m/sec की चाल से दौड़ता है। यदि घर्षण को उपेक्षणीय माना जाये तो मेरी गो–राउन्ड तथा बालक का कोणीय वेग होगा –

(A) 0.1 rad/sec (B) 0.2 rad/sec
(C) 0.4 rad/sec (D) 0.8 rad/sec

हल : (C)

$m_c vr = I\omega = [m_c r^2 + mk^2]\omega$

दिया हुआ हैं , r = 4m and m_c = 30 kg

$\therefore\ 30 \times 5 \times 4 = (120 \times 3^2 + 30 \times 4^2)\omega$

$m = 120$ kg

या $\omega = \frac{600}{1080+480} = 0.4$ rad/sec.

उदा.19 1.0 kg द्रव्यमान की वस्तु दो मीटर व्यास के पथ पर 10 चक्कर प्रति 31.4 sec. की दर से घूम रही है। वस्तु का कोणीय संवेग होगा –

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

हल : (C)

वस्तु का द्रव्यमान $m = 1.0$ kg.

घूर्णन अक्ष से वस्तु की दूरी, $r = \frac{2.0}{2} = 1.0$ m

$\therefore$ घूर्णन अक्ष के परितः वस्तु का जड़त्व आघूर्ण

$I = mr^2 = (A).(A)^2 = 1$ kg-m^2

वस्तु का कोणीय वेग, $\omega = 2\pi n$, यहाँ n प्रति सैकेण्ड चक्करों की संख्या है।

यहाँ, $n = \frac{10}{31.4}$

$\therefore \omega = 2 \times 3.14 \times \frac{10}{31.4} = 2$ rad/s

$\therefore$ कोणीय संवेग, $J = I\omega = 1 \times 2 = 2$ kg-m^2/s

उदा.20 पृथ्वी का अपनी कक्ष के परितः कोणीय संवेग होगा ? (पृथ्वी का द्रव्यमान $= 5.98 \times 10^{27}$ gm तथा पृथ्वी की माध्य त्रिज्या $R = 9.37 \times 10^6$ m) –

हल : दिया हुआ है,

$M = 5.98 \times 10^{27}$ gm $= 5.98 \times 10^{24}$ kg

तथा $R = 9.37 \times 10^6$ m

कोणीय वेग,

$$\omega = \frac{2\pi \text{radian}}{1 \text{day}} = \frac{2\pi}{24\times60\times60} \text{ rad/sec}$$

पृथ्वी का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} \times (5.98 \times 10^{24})(9.37 \times 10^6)^2$$

$\therefore J = I\omega = 1.53 \times 10^{34}$ kg m^2/sec

(ω व I के मान रखने पर)

उदा.21 कोणीय संवेग का z-घटक रेखीय संवेग के पदो में होगा –

(A) $J_z = xp_y - yp_x$ (B) $J_z = yp_y - xp_x$
(C) $J_z = zp_y - yp_z$ (D) $J_z = zp_x - xp_z$

हल : (A)

$J_z = xp_y - yp_x$, चूँकि $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$

8. घूर्णन गतिज ऊर्जा

a) किसी पिण्ड की घूर्णन गति के कारण ऊर्जा को घूर्णन ऊर्जा कहते है।

b) यदि पिण्ड का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I तथा कोणीय वेग ω हो, तो घूर्णन गतिज ऊर्जा –

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{or} \quad E_r = \frac{1}{2} MK^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{J^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{\vec{J}.\vec{J}}{I}$$

c) यदि ω नियत हो तो, $E_r \propto I$

d) यदि I नियत हो तो, $E_r \propto \omega^2$

e) जब J नियत हो तो, $E_r \propto \frac{1}{I}$

f) कार्य ऊर्जा प्रमेय :–

बल आघूर्णो द्वारा किया गया कार्य = घूर्णन गतिज ऊर्जा में परिर्वतन

g) घूर्णन शक्ति $P = \frac{dE_r}{dt} = \tau\omega = \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right) . \left(\frac{\vec{J}}{I}\right)$

h) यदि कोई पिण्ड घूर्णन गति के साथ साथ रेखीय गति भी करता हो, तो पिण्ड की कुल ऊर्जा गतिज ऊर्जा तथा रेखीय गतिज ऊर्जा योग के बराबर होती है।

$\therefore$ कुल ऊर्जा $= E_r + E_t$

$$= \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

i) यदि गति बिना फिसले हो रही हो, तो $v = r\omega$ तथा $a = r\alpha$

j) मात्राक जूल (ऊर्जा के मात्राक के समान)

k) विमाः $= M^1L^2T^{-2}$

उदाहरण घूर्णन गतिज ऊर्जा पर आधारित

उदा.22 घूर्णन करती हुई दो वस्तुओं A व B के जड़त्व vk?kwZ I_A व I_B ($I_A > I_B$) हैं तथा उनके कोणयी संवेग समान है। यदि इनकी गतिज ऊर्जाऐं क्रमशः K_A व K_B हों तो –

(A) $\frac{K_A}{K_B} > \frac{1}{1}$ (B) $\frac{K_B}{K_A} > \frac{1}{1}$

(C) $\frac{K_A}{K_B} = 1$ (D) $\frac{K_A}{K_B} = \frac{1}{2}$

हल : (B)

घूर्णन करती हुई वस्तु की गतिज ऊर्जा ,

$K = 1/2\ I\omega^2$

तथा कोणीय संवेग, $J = I\omega$

$$\therefore \quad K = \frac{J^2}{2I}$$

माना K_A व K_B वस्तुओं A व B की गतिज ऊर्जा है, तथा प्रत्येक का कोणीय संवेग J है तो

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{J^2/2I_A}{J^2/2I_B} = \frac{I_B}{I_A}$$

लेकिन $I_A > I_B$ (दिया हुआ है), $\therefore K_B > K_A$

उदा.23 किसी अक्ष के परितः एक वस्तु का जड़त्व आधूर्ण 1.2 kg-m^2 है। प्रारम्भ में, वस्तु विरामवस्था में है। 1500 joule गतिज ऊर्जा उत्पन्न करने हेतु 25 rad/sec^2 का कोणीय त्वरण कितने समय तक आरोपित करना होगा –

(A) 4s (B) 2s
(C) 8s (D) 10s

हल : (B)

$$K.E. = 1/2\ I\ \omega^2 = 1/2\ I\ (\alpha t)^2 = 1/2\ I\alpha^2 t^2$$

$$\therefore\ 1500 = 1/2\ (1.2)\ (25)^2\ t^2 \text{ or } t = 2s$$

उदा.24 20 kg व 1m व्यास का पहिया 300 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूम रहा है। इसकी गतिज ऊर्जा होगी –

(A) 2465 J (B) 2.465 J
(C) 24.65 J (D) 246.5 J

हल. (A)

यहाँ, $\omega = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 31.4$ rad/sec.

$I = mR^2 = 20\ (1/2)^2$

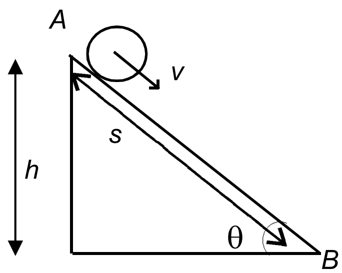
$= 5$kg m^2

$$\therefore \quad K.E. = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times (31.4)^2$$

$= 2465$ J

9. नत तल पर पिण्ड की लुढ़कनी गति ::

तल पर पिण्ड की रेखीय गति -



माना तल की लम्बाई S तथा क्षैतिज से झुकाव θ है।

a) नत तल पर पिण्ड का रेखिक त्वरण

$$a_{\text{रेखिक}} = g\sin\theta$$

b) कोणीय त्वरण = शून्य

x) निम्नतम बिन्दु B तक आने पर पिण्ड का वेग

$$V_{linear} = \sqrt{2gh}$$

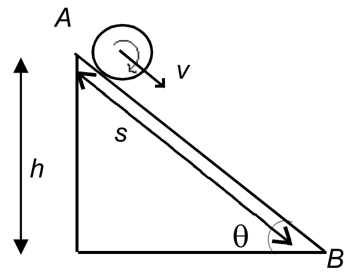
d) घूर्णन वेग = शून्य।

e) निम्नतम बिन्दु B तक पहुॅचने मे लगा समय t हो, तो $t_{linear} = \sqrt{\dfrac{2s}{a_{linear}}} = \sqrt{\dfrac{2s}{g\sin\theta}}$

f) बिन्दु B पर पहुॅचने पर, स्थितिज ऊर्जा में कमी = गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$= mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

नत तल पर पिण्ड की लुढ़कनी गति -



माना नत तल की लम्बाई S तथा क्षैतिज से झुकाव θ है।

a) बिन्दु पर पहुॅचने पर,

स्थितिज ऊर्जा में कमी = गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

b) चूंकि गति बिना फिसले लुढकन गति है अतः, $v = R\omega$ तथा $a = R\alpha$ होगा

c) निम्नतम बिन्दु पर पहुॅचने पर पिण्ड का वेग

$$= \sqrt{\frac{2gh}{1+K^2/R^2}}$$

जहॉ K घूर्णन त्रिाज्या व R पिण्ड की त्रिाज्या है।

d) नत तल पर पिण्ड का रेखीय त्वरण

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+K^2/R^2}$$

e) नत तल के निम्नतम बिन्दु तक पहुॅचने में लगा समय,

$$t = \sqrt{\frac{2s(1+K^2/R^2)}{g\sin\theta}}$$

f) कोणीय त्वरण $\alpha = \dfrac{a}{R}$,

कोणीय वेग $= \dfrac{v}{R}$

Examples based on Linear and rolling motion of a body on inclined plane

उदा 25. एक ठोस गोलाकार गेंद किसी मेज पर बिना फिसल लुढ़कती है। कुल ऊर्जा का अंश जो घूर्णन गतिज ऊर्जा है, होगा -

(A) 2/5 (B) 3/5
(C) 2/7 (D) 3/7

हल : (C)

कुल ऊर्जा,

$E = (1/2)\, I\omega^2 + (1/2)\, mv^2$

$= (1/2)\,(2/5\, mr^2)\, \omega^2 + (1/2)\, mr^2\omega^2$

$= (1/5)\, mr^2\omega^2 + (1/2)\, mr^2\omega^2$

$= (7/10)\, mr^2\omega^2$

घूर्णन ऊर्जा $= (1/5)\, mr^2\omega^2$

$$\therefore \frac{\text{Rotational energy}}{\text{Total energy}} = \frac{\frac{1}{5}mr^2\omega^2}{\frac{7}{10}mr^2\omega^2} = \frac{2}{7}$$

उदा.26 समान द्रव्यमान व त्रिज्या के ठोस गोला व ठोस बेलन किसी नत तल पर लुढ़कते है। इनके त्वरणों का अनुपात होगा-

(A) 15 : 14 (B) 14 : 15
(C) 5 : 3 (D) 3 : 5

हल : (A)

हम जानते है कि, $a = \dfrac{g\sin\theta}{(1+k^2/R^2)}$

यहाँ, $a_1 = \dfrac{5g\sin\theta}{7}$ तथा $a_2 = \dfrac{2g\sin\theta}{3}$

$\therefore\ a_1 : a_2 = 15 : 14$

उदा.27 एक गोला h ऊँचाई के नत तल पर बिना फिसले लुढ़क रहा है। यदि गोले का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या r हों, तो जमीन पर पहुँचने पर इसका रेखीय वेग होगा (K गोले की घूर्णन त्रिज्या है)

(A) $\sqrt{\dfrac{2gh}{1+2k^2/r^2}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{2gh}{1+k^2/2r^2}}$

(C) $\sqrt{\dfrac{2gh}{1+k^2/r^2}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{gh}{1+k^2/r^2}}$

हल : (C)

जब गोला जमीन पर पहुँचता है, तो इसकी स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है।

$\therefore$ K.E. $= (1/2)\, mv^2 + (1/2)\, I\omega^2$

$= (1/2)\, mv^2 + (1/2)\,(mk^2)\, \omega^2$

$mgh = (1/2)\, m\,(v^2 + k^2\omega^2)$

या $2gh = \omega^2\,(r^2 + k^2)$ $(\because v = r\omega)$

$\therefore\ \omega = \sqrt{\dfrac{2gh}{r^2+k^2}},\ v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+k^2/r^2}}$

उदा.28 m द्रव्यमान की वस्तु किसी तल तल के निम्नतम बिन्दु पर फिसलते हुए v वेग से पहुँचता है। यदि इतना ही द्रव्यमान वलय के रूप में हो, तो इसका तल के निम्नतम बिन्दु पर पहुँचने से वेग होगा –

(A) v (B) $\sqrt{2}$ v

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ v (D) $\sqrt{2/5}$ v

हल : (C)

फिसलने हेतु , $a = g\sin\theta$. अतः

$v^2 = 0 + 2\,(g\sin\theta) \times \ell$ -----(i)

लुढ़कने हेतु,

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)} = \frac{1}{2}\, g\sin\theta\ (\because k^2 = R^2)$$

वलय के लिए ,

$$V^2 = 2 \times (1/2\, g\sin\theta) \times \ell = \frac{v^2}{2},$$

$$\therefore V = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

उदा.29 जब कोई गोला बिना फिसलें लुढ़कता है, तो इसकी रेखीय गतिज उर्जा व कुल उर्जा का अनुपात होगा

(A) 1: 7 (B) 1 : 2
(C) 1 : 1 (D) 5 : 7

हल : (D)

$$\frac{E_{trans}}{E_{total}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right) x \frac{v^2}{r^2}}$$

$$= \frac{1}{1+(2/5)} = \frac{5}{7}$$

$[\because I = \frac{2}{5}\, mr^2,\ v = r\omega]$

याद करने योग्य तथ्य

(a) एक दृढ़ पिण्ड सामान्यतः गति अवस्था में होता है, जब इसमें रेखिक तथा घूर्णन गतियाँ होती है।

(b) बल का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण बल आघूर्ण कहलाता है।

(c) बल आघूर्ण = बल x क्रियाकारी बिन्दु की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी

τ = r. F या $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ = rF $\sin\theta$, जहाँ θ, $\vec{r}$ व $\vec{F}$ के बीच का कोण है।

(d) बल आघूर्ण दक्षिणावर्त या वामावर्त हो सकते है। वामावर्त बल आघूर्ण धनात्मक लिया जाता है।

(f) बल आघूर्ण की शक्ति, $P = \tau \times \omega$, जहाँ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

(g) *समान्तर अक्षों का सिद्धान्त :–* $I = I_{cm} + Ma^2$, जहॉ I_{cm} = वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण, M = वस्तु का सम्पूर्ण द्रव्यमान, a = दो समान्तर अक्षों के बीच की लम्बवत् दूरी

(h) *लम्बवत् अक्षों का सिद्धान्त :–* $I_z = I_x + I_y$, जहाँ I_x = X अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, तथा I_y = Y अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण बीच की लम्बवत् दूरी। I_z = x व y अक्ष पर लम्बवत् व इनके कटान बिन्दु से गुजरती अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

(i) *घूर्णन गतिज ऊर्जा ,* $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$

(j) *लुढकती हुई वस्तु की कुल ऊर्जा –*

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

(k) *नत तल पर लुढकती हुई वस्तु का त्वरण, –*

$$A = a = g \sin\theta \,/\, \left(1 + \frac{1}{mR^2}\right)$$

हल सहित उदाहरण

उदा.1 गाड़ी के एक पहिये की त्रिज्या 0.4 मीटर है। गाड़ी विरामावस्था से 20 सेकण्ड तक 1.5 रेडियन/सेकण्ड^2 के कोणीय त्वरण से त्वरित होती है। इस समयान्तराल में पहिया द्वारा तय दूरी तथा इसका रेखीय वेग क्रमशः होगा –

(A) 120m,12m/s (B) 12m,12m/s
(C) 1.2m,12m/s (D) 120m,1.2m/s

हल : (A)

पहिया प्रारम्भ में विरामावस्था में है ($\omega_0 = 0$), t समयान्तराल में पहिये का कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$= 0 + \frac{1}{2}$ 1.5 (रेडियन/सेकण्ड^2) (20 सेकण्ड)^2

= 300 रेडियन

पहिये की त्रिज्या r = 0.4 मीटर है। अतः पहिये का रेखीय विस्थापन

$s = r\theta$

= 0.4 मीटर x 300 रेडियन = 120 मीटर।

यह पहिये द्वारा तय की गई दूरी है।

पहिये का t समयान्तराल के बाद कोणीय वेग

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

= 0 + (1.5 रेडियन/सेकण्ड^2) (20 सेकण्ड)

= 30 रेडियन/सेकण्ड

अतः पहिये का रेखीय वेग,

$v = r\omega$

= 0.4 मीटर × 30 रेडियन/सेकण्ड

= 12 मीटर/सेकण्ड।

उदा.2 एक 6 किलोग्राम का पहिया 300rpm की दर से घूम रहा है इसका कोणिय वेग क्या होगा –

(A) 31.4 rad/sec (B) 3.14 rad/sec
(C) 0.314 rad/sec (D) 0.03 rad/sec

हल : (A)

यहां $\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2 \times 3.14 \times 300}{60}$

= 31.4 rad/sec

उदा.3 किसी मोटर की शॉफ्ट बल–आघूर्ण से कोणीय त्वरण प्राप्त करता है जिसे $\alpha = 3t - t^2$ से दिया जाता है। प्रारम्भ से 2sec. बाद $\alpha = 0$ हो, तो 6 sec. बाद कोणीय वेग होगा -

(A) 10/3 rad/sec (B) 20/3 rad/sec
(C) 5/3 rad/sec (D) 1/3 rad/sec

हल : (A)

दिया है $\alpha = 3t - t^2 \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 3t - t^2$ or

$\therefore d\omega = (3t - t^2)\, dt \Rightarrow \int d\omega = \int (3t - t^2)\, dt$

$$\Rightarrow \omega = \left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) + C$$

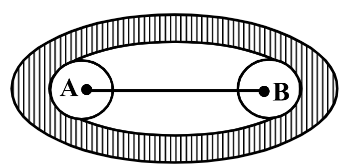
$[t = 0, \omega = 0 \therefore c = 0]$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$$

t = 2 रखने पर, $\omega = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$ rad/sec.

चूँकि 2 sec. बाद कोणीय त्वरण शून्य है अतः 6 sec बाद भी कोणीय त्वरण समान अर्थात् 10/3 rad/sec.रहेगा।

उदा.4 एक A चक्र जिसकी त्रिज्या 20 cm है किसी बैल्ट द्वारा चक्र B, त्रिाज्या 30 cm से चित्रानुसार युग्मित किया जाता है। चक्र A विराम से नियत दर 3.14 rad/sec^2 से कोणीय वेग बढ़ाता है। यदि यह माने कि बैल्ट फिसलती नहीं है, तो चक्रक B द्वारा घूर्णन चाल 100 rev./min प्राप्त करने में लगा समय होगा –



(A) 5 sec (B) 10 sec
(C) 2.5 sec (D) 20 sec

हल : (A)

चूँकि बैल्ट फिसलती नहीं है,

अतः A = को वेग = B को वेग

i.e. $v_A = v_B$ or $r_A\omega_A = r_B\omega_B$

दिया है, r_A = 20 cm, r_B = 30 cm

तथा $\omega_B = 2\pi \times 100/60$ rad/sec

अतः $20\ \omega_A = 30 \times 2\pi \times 100/60 = 100\ \pi$

या $\omega_A = 5\pi$ rad/sec

हम जानते हैं $\omega = \omega_0 + \alpha t$ or $t = \dfrac{\omega}{\alpha}$

(as $\omega_0 = 0$) $= \dfrac{5\pi}{3.14} = 5$ sec.

उदा.5 एक टेबल अपनी केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः क्षैतिज तल में घूम रही है। 20 rad/sec.के कोणीय वेग से इस पर एक चक्र जो वियरिग युक्त क्षैतिज अक्ष पर 40 rad/sec घूम रही है, स्थित है, कमरे में स्थित प्रेक्षक को चक्र का कोणीय वेग प्रतीत होगा –

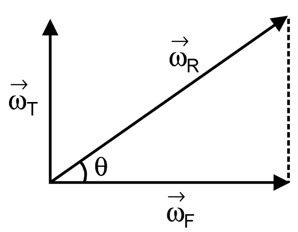
(A) $20\sqrt{5}$ rad/sec क्षैतिज से $\tan^{-1}$ (1/2) कोण पर

(B) $10\sqrt{5}$ rad/sec क्षैतिज से $\tan^{-1}$ (1/3) कोण पर

(C) $5\sqrt{5}$ rad/sec क्षैतिज से $\tan^{-1}$ (1/2) कोण पर

(D) $20\sqrt{5}$ rad/sec क्षैतिज से $\tan^{-1}$ (1/6) कोण पर

हल : (A)



जैसे कि घूमने वाली टेबल की अक्ष उर्ध्वाधर है अतः इसके कोणीय वेग ω_T की दिशा उर्ध्वाधर होगी। चक्र की अक्ष क्षैतिज है इसलिए इसका कोणीय वेग ω_F क्षैतिज दिशा में होगा –

अतः परिणामी कोणीय वेग

$$\vec{\omega}_R = \vec{\omega}_F + \vec{\omega}_T$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_F^2 + \omega_T^2} = \sqrt{40^2 + 20^2}$$

$$= \sqrt{2000} = 20\sqrt{5} \text{ rad/sec.}$$

$\vec{\omega}_R$ जिस तल में है वह क्षैतिज से θ कोण बनाता हैं, जिसे

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_T}{\omega_F}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ से दिया जाता हैं

उदा.6 एक कण जिसका द्रव्यमान 2 किग्रा है, 0.8 मीटर की त्रिज्या वाले वृत्त में 44 रेडियन/सेकण्ड के कोणीय वेग से घूम रहा है। यदि इसके मार्ग की त्रिज्या 1.0 मीटर हो जाये तो इसके कोणीय वेग का मान क्या होगा ?

(A) 2.816 rad/sec. (B) 3.832 rad/sec.
(C) 5.899 rad/sec. (D) 28.16 rad/sec.

हल : (D)

माना कण का घूर्णन अक्ष के परितः प्रारम्भिक जड़त्व आघूर्ण I_1 है तथा कोणीय वेग ω_1है, तथा मार्ग की त्रिज्या बदल जाने पर जड़त्व आघूर्ण I_2 व कोणीय वेग हो जाता ω_2 हो जाता है। कोणीय–संवेग संरक्षण से

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

यहाँ $I_1 = 2 \times (0.8)^2 = 1.28$ किग्रा मीटर^2 , $\omega_1 = 44$ रेडियन/सेकण्ड, $I_2 = 2 \times (1.0)^2 = 2$ किग्रा मीटर^2 , ω_2 = ?

$\therefore \quad 1.28 \times 44 = 2 \times \omega_2$

अथवा $\omega_2 = \dfrac{1.28 \times 44}{2}$ = 28.16 रेडियन/सेकण्ड।

उदा.7 एक भारहीन क्षैतिज छड़ अक्ष OO' के परितः घूमने के लिए स्वतन्त्रा है। 1–1 किग्रा के दो द्रव्यमान A तथा A' पर रखो गया है, तथा O'A = O'A' = 0.20 मीटर। अब 2.0 न्यूटन मीटर का एक बल आघूर्ण लगाया जाता है, जिससे कि निकाय OO' के परितः घूमता है। यदि द्रव्यमान खिसकाकर B व B' पर रख दिये जायें जिससे कि O'B = O'B' = 0.50 मीटर, तो कोणीय त्वरण में कमी होगी।

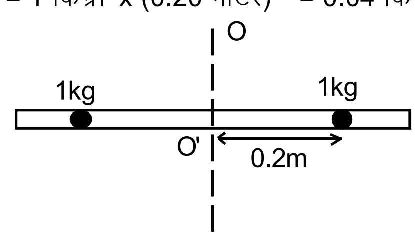
(A) 21rad/sec^2 (B) 42rad/sec^2
(C) 12rad/sec^2 (D) 24rad/sec^2

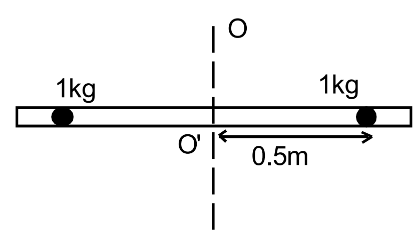
हल : (A)

पहली स्थिति में, प्रत्येक द्रव्यमान का OO' के परितः जड़त्व आघूर्ण

= द्रव्यमान x (OO' से दूरी)^2

= 1 किग्रा x (0.20 मीटर)^2 = 0.04 किग्रा मीटर^2





$\therefore$ पूरे निकाय OO' के परितः जड़त्व आघूर्ण (छड़ भारहीन है)

$I = 2 \times 0.04 = 0.08$ किग्रा मीटर^2

मानाकि कोणीय त्वरण α है। तब बल आघूर्ण

$\tau = I\alpha$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2.0N-m}{0.08kg-m^2}$$

= 25 रेडियन /सेकण्ड^2

दूसरी स्थिति में प्रत्येक द्रव्यमान का OO' के परितः जड़त्व आघूर्ण

= किग्रा × (0.50 मीटर)^2 = 0.25 किग्रा–मीटर^2

पूरे निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$I = 2 \times 0.25 = 0.50$ किग्रा मीटर^2

$\therefore$ कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2.0}{0.50}$

= 4.0 रेडियन/सेकण्ड^2

कोणीय त्वरण मे कमी = 25 – 4 = 21 rad/sec^2

उदा.8 दो समान गोले जिनके द्रव्यमान M त्रिज्या R/2 हैं, किसी द्रव्यमानहीन छड़ जिसकी लम्बाई 2R है, से जोड़े जाते हैं। इस निकाय का गोलों के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष जो, छड़ के लम्बवत् हो, के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा –

(A) $\frac{21}{5}$ MR^2 (B) $\frac{2}{5}$ MR^2

(C) $\frac{5}{2}$ MR^2 (D) $\frac{5}{21}$ MR^2

हल : (A)

$$I = \frac{2}{5} M \left(\frac{R}{2}\right)^2 + M(2R)^2 + \frac{2}{5} M \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$= \frac{21}{5} MR^2$$

उदा.9 दो वृत्तीय डिस्क A तथा B जिनके द्रव्यमान व मोटाई समान लेकिन उनके पदार्थो के घनत्व d_A व d_B ($d_A > d_B$) है। यदि उनके केन्द्र से गुजरने वाली तथा वृत्तीय तल पर लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_A व I_B, हों तो -

(A) $I_A = I_B$ (B) $I_A > I_B$

(C) $I_A < I_B$ (D) $I_A \geq I_B$

हल : $I_A = \frac{m_A r_A^2}{2}$ ओर $I_B = \frac{m_B r_B^2}{2}$,

$$\therefore \frac{I_A}{I_B} = \frac{r_A^2}{r_B^2} \quad (\because m_A = m_B) \quad \text{-----(1)}$$

अब , $m_A = \pi r_A^2\, t\, d_A$, $m_B = \pi r_B^2\, t\, d_B$

So, $\pi r_A^2\, t d_A = \pi r_B^2\, t\, d_B$

या $$\frac{r_A^2}{r_B^2} = \frac{d_B}{d_A} \quad \text{-----(2)}$$

समीकरण (1) व (2) से

$\frac{I_A}{I_B} = \frac{d_B}{d_A}$. As $d_A > d_B$ अतः $I_A < I_B$

उदा.10 HCl अणु के द्रव्यमान के केन्द्र तथा बन्ध के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा -

(दिया हैः अन्तराआणिवक दूरी = 1.3 Å,

क्लोरीन का आण्विक भार = 35 तथा ,

प्रोटान का द्रव्यमान = 1.7×10^{-27} kg)

(A) 2.79×10^{-47} kg-m^2

(B) 27.9×10^{-47} kg-m^2

(C) 27.9×10^{-50} kg-m^2

(D) 2.79×10^{-50} kg-m^2

हल : (A)

द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण $I = \mu r^2$

$$\mu = \text{समानीत द्रव्यमान} = \frac{m_H . m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}}$$

$$= \frac{1.7\times10^{-27}\times35\times1.7\times10^{-27}}{1.7\times10^{-27}+35\times1.7\times10^{-27}}$$

$= 1.65 \times 10^{-27}$ kg

$\therefore I = (1.65 \times 10^{-27})(1.3 \times 10^{-10})^2$

$= 2.79 \times 10^{-47}$ kg. m^2.

उदा.11 कोई द्रव्यमान m जो r त्रिज्या के चक्र से लटक रहा है, मुक्त रूप से छोड़ने पर t सेकण्ड में h ऊँचाई गिरता है। चक्र का जड़त्व आघूर्ण होगा –

(A) $\frac{m(g-2h)}{2h}\left(\frac{r^2}{t^2}\right)$ (B) $\frac{mr^2(g-2h)t}{2h}$

(C) $\frac{m(gt^2-2h)r^2}{2h}$ (D) $\frac{m(gt^2-2h)t^2}{2hr^2}$

हल : (C)

$$h = 1/2\ at^2 \text{ or } a = \frac{2h}{t^2} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2}$$

यहाँ $mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a)$

$\tau = I\alpha$ or $Tr = I\alpha$ or $m(g - a).\ r = I\alpha$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{m(g-a)r}{\alpha} = \frac{m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)r}{2h/rt^2}$$

$$= m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)\frac{r^2t^2}{2h}$$

उदा.12 1.5 m लम्बाई व 0.1 kg की एक छड़ की लम्बाई के लम्बवत् एवं केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_1 है तथा एक छड़ का छड़ की लम्बाई के लम्बवत् एवं केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_2 हैं तो $I_1 \times I_2$ होगा ($kg^2\ m^4$ में)

(A) .15 (B) 0.25
(C) .75 (D) .35

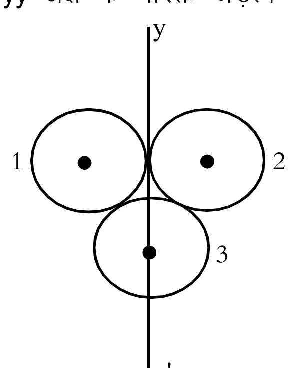
हल (A)

$$I_1 = \frac{M\ell^2}{12} = \frac{0.1\times(1.5)^2}{12} = 0.01875\ kg.m^2$$

$$I_2 = \frac{M\ell^2}{3} = \frac{0.1\times(1.5)^2}{3} = 0.075\ kg.m^2$$

Now, $I_1 \times I_2 = 1.4 \times 10^{-3}\ kg^2.m^4$

उदा.13 तीन वलय जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान P व त्रिज्या Q हैं, चित्रानुसार व्यवस्थित है। इस निकाय का yy' अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण हैं -



(A) $\frac{7}{2}PQ^2$ (B) $\frac{2}{7}PQ^2$

(C) $\frac{2}{5}PQ^2$ (D) $\frac{5}{2}PQ^2$

हल : (A)

वलय '1' का yy' के परितः जड़त्व आघूर्ण = वलय का तल के समान्तर स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण

$\Rightarrow \quad I_1 = (3/2)\ MR^2$

इसी प्रकार वलय '2' का yy',के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_2 = (3/2)\ MR^2$

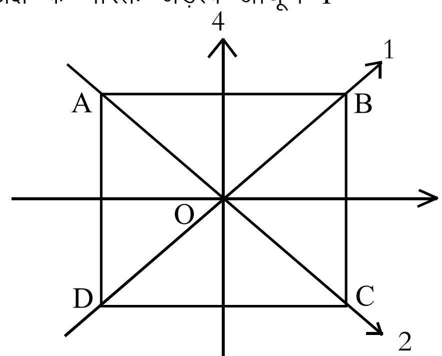
वलय '3' का yy' के परितः जड़त्व आघूर्ण = वलय का व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_3 = \frac{MR^2}{2}$$

yy' के परितः कुल जड़त्व आघूर्ण

$= I_1 + I_2 + I_3 = (7/2)\ MR^2 = (7/2)\ PQ^2$

उदा.14 सही विकल्प (एक अथवा अधिक) चुनिये : एकसमान मोटाई की एक पतली वर्गाकार प्लेट ABCD का प्लेट के तल के लम्बवत् व केन्द्र O से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I =



(A) $I_1 + I_2$ (B) $I_3 + I_4$
(C) $I_1 + I_3$ (D) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

जहाँ I_1, I_2, I_3 व I_4 प्लेट के तल में स्थित 1, 2, 3 व 4 अक्षों के परितः क्रमशः जड़त्व आघूर्ण है।

हल : (A, B, C)

लम्बवत् अक्षों के प्रमेय के अनुसार

$I = I_1 + I_2 = I_3 + I_4$

वर्गाकार प्लेट की सममिति से

$I = I_1 + I_2$ तथा $I_3 = I_4$

$I = 2I_1 = 2I_3$ अथवा $I_1 = I_3$.

इस प्रकार $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$.

अतः पुनः $I =z\ I_1 + I_2 = I_1 + I_3 = I_3 + I_4$

उदा.15 दिया है $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ तथा $\vec{F} = 2\hat{i} + 6\hat{k}$. बल आघूर्ण का मान होगा

(A) $\sqrt{405}$ N.m. (B) $\sqrt{410}$ N.m.

(C) $\sqrt{504}$ N.m. (D) $\sqrt{510}$ N.m.

हल : (C)

हम जानते है कि $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\Rightarrow \vec{\tau} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (2\hat{i} + 6\hat{k})$

$= 12(-\hat{j}) + 6(-\hat{k}) + 18\hat{i}$

$= -12\hat{j} - 6\hat{k} + 18\hat{i}$

[Note : $\hat{i} \times \hat{i} = 0$, $\hat{i} \times \hat{j} = k$, $\hat{j} \times \hat{i} = -k$ etc.]

अतः $|\vec{\tau}| = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2 + (18)^2}$

$= \sqrt{144 + 36 + 324} = \sqrt{504}$

उदा.16 समरूप वृतीय पहिये पर आरोपित बलआघूर्ण इसका कोणीय वेग A_0 से $4A_0$, करने में 4 sec का समय लेता है तो बल आघूर्ण का मान होगा –

(A) $4A_0$ (B) $12\ A_0$

(C) A_0 (D) $\frac{3A_0}{4}$

हल : (D)

बलआघूर्ण τ = कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर

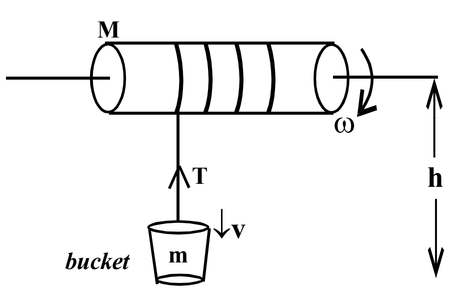
$= \frac{dJ}{dt} = \frac{4A_0 - A_0}{4} = \frac{3A_0}{4}$

उदा.17 m द्रव्मायन व r त्रिज्या का एक बेलन किसी घर्षण राहित धुरी जो कुऐं के ऊपर किनारों पर रखा गया है । नगण्य द्रव्यमान की एक डोरी बेलन पर लपेटी गयी है तथा इस डोरी के एक सिरे में एक बाल्टी लटकायी हैं। बाल्टी का रेखीय त्वरण होगा

(A) $\frac{mg}{M+m}$ (B) $\frac{mg}{M+2m}$

(C) $\frac{2mg}{M+2m}$ (D) $\frac{M}{mg}$

हल : (C)



$mg - T = ma$

$T = m(g - a)$ --------(1)

$\tau = I\,\alpha = r\,T \Rightarrow (1/2)\ Mr^2.\ a/r = rT$

$\Rightarrow T = (1/2)\ Ma$ ---------(2)

From (1) and (2), (1/2) Ma = m (g – a)

$\Rightarrow \frac{M+2m}{2}\ a = mg, \Rightarrow a = \frac{2mg}{M+2m}$

उदा.18 उपरोक्त उदाहरण में, बाल्टी का h ऊँचाई से गिरने पर वेग होगा -

(A) $\left(\frac{4mgh}{M+2m}\right)^{1/2}$ (B) $\left(\frac{4Mgh}{M+2m}\right)^{1/2}$

(C) $\left(\frac{2mgh}{M+2m}\right)^{1/2}$ (D) $\left(\frac{mgh}{M+m}\right)^{1/2}$

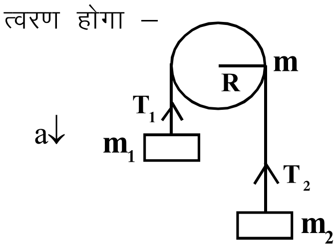
हल : (A)

माना h ऊँचाई गिरने पर बाल्टी का वेग v हो जाता हैं

अब, $v^2 = u^2 + 2ah$"

$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2.2mgh}{(M+2m)}} = \left(\frac{4mgh}{M+2m}\right)^{1/2}$

उदा.19 m_1 व m_2 द्रव्यमान की दो वस्तुऐं किसी डोरी के किनारे पर बंधे है। डोरी m द्रव्यमान व R त्रिज्या की घिरनी से गुजरती है। यदि $m_1 > m_2$ निकाय का त्वरण होगा –



(A) $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$ (B) $\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}g$

(C) $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (1/2)m}$ (D) $\frac{m_1 - m_2 + m}{m_1 + m_2 + m}$

हल : (C)

$m_1g - T_1 = m_1a$ -----------(i)

$T_2 - m_2g = m_2a$ ----------(ii)

$\therefore (T_1 - T_2) + (m_1 + m_2)\ a = (m_1 - m_2)\ g$

$\Rightarrow T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)\ g - (m_1 + m_2)\ a$

$\tau = (T_1 - T_2)\ R = I\,\alpha$

$= (1/2)\ mR^2\ (a/R)$ ---------(iii)

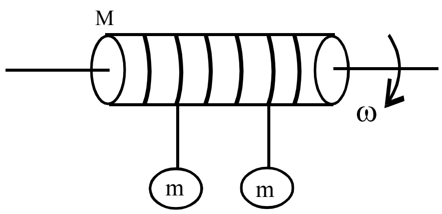
$\Rightarrow (T_1 - T_2) = (1/2)\ ma$ ---------(iv)

समीकरण (iii) व (iv) से

$(1/2)\ ma = (m_1 - m_2)\ g - (m_1 + m_2)\ a$

$\Rightarrow \qquad a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}\ g$

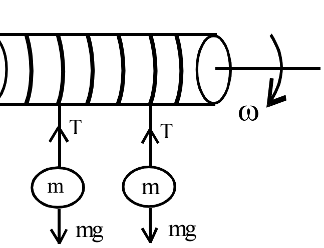
उदा.20 m द्रव्यमान व R त्रिज्या का एक ठोस बेलन किसी घर्षण रहित क्षैतिज धुरी पर घूर्णन करता है। दो एक समान दव्यमान बेलन पर लिपटी दो डोरियो से लटक रहे है। यदि निकाय विराम से छोड़ा जाये तो प्रत्येक डोरी में तनाव होगा –



(A) $\dfrac{Mmg}{(M+m)}$ (B) $\dfrac{Mmg}{(M+2m)}$

(C) $\dfrac{Mmg}{(M+3m)}$ (D) $\dfrac{Mmg}{(M+4m)}$

हल : (D)



$mg - T = ma$

$mg - T = ma$

उपरोक्त समीकरणों से

$2mg - 2T = 2ma$ ------------(i)

$\tau = (2T)\ R = I\ \alpha$

$= (1/2)\ MR^2.\ (a/R)$ -----------(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$T = \dfrac{Mm}{M+4m}\ g$

Note : Also $a = 4mg\ (M + 4m)$

उदा.21 एक वस्तु जिसका जड़त्व आघूर्ण 3 $kg.m^2$ है, विराम में है। इसे 6 N-m बल आघूर्ण से 20 sec. तक घुमाया जाता है तो किया गया कार्य होगा (जूल में)

(A) 24 (B) 240
(C) 2400 (D) 24000

हल (C)

माना τ बल आघूर्ण से, कोणीय त्वरण α उत्पन्न होता है तो $\tau = I\alpha$

जहाँ I वस्तु का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

यहाँ $\tau = 6$ N.m and $I = 3$ kg . m^2.

अतः $\alpha = \dfrac{\tau}{I} = \dfrac{6}{3} = 2\ rad/sec^2$

प्रारम्भ में वस्तु विराम में हैं ($\omega_0 = 0$). यह कोणीय त्वरण α के आधीन 2 sec. तक घूमती है। इस समयान्तराल में वस्तु का कोणीय विस्थापन

$\theta = \omega_0 t + (1/2)\ \alpha\ t^2$

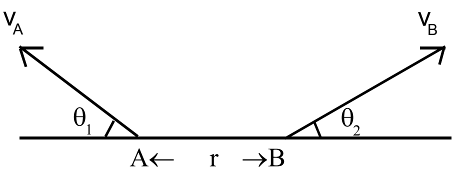
$= 0 + 1/2 \times 2 \times (20)^2 = 400$ radian

इस विस्थापन में किया गया कार्य

w = (बल आघूर्ण × विस्थापन)

$= \tau \times \theta = 6 \times 400 = 2400$ joule

उदा.22 दो कण A व B चित्रानुसार गति कर रहे है। इस क्षण A का B के सापेक्ष कोणीय चाल होगी –



(A) $\dfrac{v_A + v_B}{r}$

(B) $\dfrac{v_A - v_B}{r}$

(C) $\dfrac{v_B \sin\theta_2 - v_A \sin\theta_1}{r}$, वामावर्त दिशा में

(D) $\dfrac{v_B \sin\theta_2 + v_A \sin\theta_1}{r}$, दक्षिणावर्त दिशा में

हल : (C)

x एवं y के अनुदिश घटक लेने पर

$v_x = -\ v_A \cos\theta_1,\ v_y = v_A \sin\theta_1$

$v'_x = v_B \cos\theta_1,\ v'_y = v_B \sin\theta_2$

y-अक्ष के अनुदिश A का B के सापेक्ष वेग

$(v_A \sin\theta_1 - v_B \sin\theta_2)$

$\because \vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ चूंकि V धनात्मक y-दिशा में है एवं A का स्थिति सदिश B के सापेक्ष ऋणात्मक x दिशा में है अतः ω, दक्षिणावर्त दिशा में होगा एवं ω का मान

$\omega = \left(\dfrac{v_A \sin\theta_1 - v_B \sin\theta_2}{r}\right)$ दक्षिणावर्त

$\omega = \left(\dfrac{v_B \sin\theta_2 - v_A \sin\theta_1}{r}\right)$ वामावर्त

उदा.23 एक कण x-y तल पर गति कर रहा है तथा इसके वेग के घटक x तथा y अक्ष के अनुदिश v_x तथा v_y है। मूल बिन्दु के परितः कोणीय संवेग होगा –

(A) $m\hat{k}\left(xv_y - yv_X\right)$ (B) $\frac{\hat{k}}{2}\left(xv_y - yv_X\right)$

(C) $m\hat{k}\sqrt{xv_y - yv_X}$ (D) $\frac{\hat{k}}{2}\sqrt{xv_y - yv_X}$

हल : (A)

हम जानते है कि कोणीय संवेग

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

$$= m\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}$$

$= m\hat{k}\left(xv_y - yv_X\right)$

उदा.24 10 kg द्रव्यमान व 0.4 m व्यास की रिंग अपनी ज्यामितीय अक्ष के परितः 1200 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूर्णन कर रही हैं जड़त्व आघूर्ण व कोणीय संवेग क्रमशः होगा –

(A) 0.4 kg-m^2, 50.28 J.sec

(B) 50.24 kg-m^2, 0.4 J-sec

(C) 0.4 J-sec, 50.24 kg-m^2

(D) 0.4 kg-m^2, 0

हल : **(C)**

रिंग का ज्यामितीय अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण = रिंग के केन्द्र व तल पर लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= MR^2 = 10\,(0.2)^2 = 10 \times 0.04 = 0.4$ kg-m^2

अब कोणीय संवेग

$J = I.\omega = I\,.\frac{2\pi n}{t}$

$= 0.4 \times \frac{2\pi \times 1200}{60} = 50.24$ J-sec.

उदा.25 m द्रव्यमान का एक तिलचट्टा किसी डिस्क की परिधि पर v वेग से वामावर्त दिशा में गति कर रहा है। डिस्क का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है तथा यह दक्षिणावर्त दिशा में ω कोणीय वेग से घूम रहा है। यदि तिलचट्टा घूमना बन्द कर दें, तो डिस्क का कोणीय वेग होगा –

(A) $\frac{I\omega}{I + mR^2}$ (B) $\frac{I\omega + mvr}{I + mr^2}$

(C) $\frac{I\omega - mvr}{I + mr^2}$ (D) $\frac{I\omega - mvr}{I}$

हल : (C)

कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से तिलचट्टे के रूकने से पूर्व कोणीय संवेग = तिलचट्टे के रूकने के बाद कोणीय संवेग

$\Rightarrow \quad I\omega - mvr = (I + mr^2)\,\omega'$

$\therefore \quad \omega' = \frac{I\omega - mvr}{I + mr^2}$

उदा.26 2kg द्रव्यमान व 0.2 m त्रिज्या का एक ठोस बेलन 3 rad/sec. के कोणीय वेग से बिना घर्षण के अपनी अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। 0.5 kg का एक द्रव्यमान जो 5 m/s के वेग से बेलन पर टकराता है, चिपक जाता है। टक्कर के कारण उर्जा में हानि होगी–

(A) 6.25 J (B) 5.25 J

(C) 4.25 J (D) 3.25 J

हल : (D)

कोणीय संवेग के सरंक्षण नियत से टक्कर से पहले कोणीय संवेग

= टक्कर के बाद कोणीय संवेग -------(i)

बेलन का टक्कर के पहले कोणीय संवेग

$J_1 = I\omega = (1/2)\, mR^2\, \omega$

$= (1/2) \times 2 \times 0.04 \times 3 = 0.12$ J.sec

समी. (i) $J_{cy\ell} + m_p vR = (I + mR^2)\,\omega$

$\Rightarrow \omega = \frac{0.12 + 0.5 \times 5 \times 0.2}{(1/2) \times 2 \times 0.04 + 0.5 \times 0.04}$

$= 10.3$ rad/sec.

(टक्कर के पहले निकाय की उर्जा)E

$= (1/2)\, I\omega^2 + (1/2)\, mv^2$

$= (1/2) \times (1/2) \times 2 \times 0.04 \times 9 + (1/2) \times 0.5 \times 25 = 6.43$ J

(टक्कर के बाद निकाय की उर्जा) E'

$= (1/2)\, I'\omega'^2$

$= (1/2) \times (1/2\, M + m)\, R^2\omega^2$

$= 1/2 \times (1/2 \times 2 + 0.5) \times 0.04 \times (10.32)^2$

$= 3.18$ J

अब, $E - E' = 6.43 - 3.18 = 3.25$ J

उदा.27 3 किलोग्राम द्रव्यमान का एक कण किसी केन्द्रीय बल जिसकी स्थितिज ऊर्जा $U(r) = 10r^3$ जूल है, के प्रभाव में गति कर रहा है। किस ऊर्जा तथा कोणीय संवेग पर उसका कक्ष 10 मीटर त्रिज्याका वृत्त होगा?

(A) 2.5×10^4J, 3000 kg m^2/sec

(B) 2.5×10^3J, 3000 kg m^2/sec

(C) 2.5×10^2J, 30000 kg m^2/sec

(D) 2.5×10^2J, 300 kg m^2/sec

हल : (A)

कण की(परिवर्ती) स्थितिज ऊर्जा $U(r) = 10r^3$ जूल।

अतः कण पर कार्यरत बल

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -30r^2$$

अतः कण की वृत्तीय गति के लिये

$$F = \frac{mv^2}{r} = 30r^2$$

m = 3 किग्रा तथा r = 10 मीटर रखने पर

v = 100 मीटर/सेकण्ड।

वृत्तीय गति में कण की कुल ऊर्जाः

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times (100)^2 + 10 \times (10^3)$$

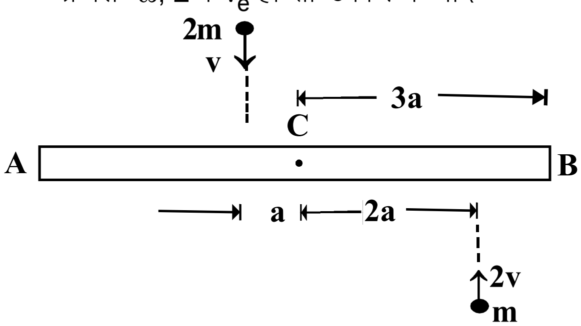
$$= 2.5 \times 10^4 \text{ जूल}$$

कण का कोणीय संवेगः

$$J = mvr = 3 \times 100 \times 10$$

= 3000 किग्रा–मीटर^2/सेकण्ड।

उदा.28. सही विकल्प (एक अथवा अधिक) चुनिये : लम्बाई 6a तथा द्रव्यमान 8m की एकसमान छड़ चिकनी क्षैतिज मेज पर रखी है। दो बिन्दु द्रव्यमान m व 2m जो कि क्रमशः 2v व v चालों से उसी क्षैतिज तल में गतिमान है, छड़ से टकराते हैं, तथा टक्कर के पश्चात् छड़ से चिपक जाते है। यदि द्रव्यमान केन्द्र के परितः कोणीय वेग, कुल ऊर्जा तथा द्रव्यमान केन्द्र का वेग क्रमशः ω, E व v_e हों तो टक्कर के बाद :



(A) $v_c = 0$ (B) $\omega = 3v/5a$,

(C) $\omega = v/5a$ (D) $E = 3mv^2/5$

हल (A,C,D)

दोनो द्रव्यमान 2m वे m छड़ से टकराने पर छड़ को बराबर बराबर संवेग (प्रत्येक 2mv) विपरीत दिशाओं में देते है। अतः टक्कर के बाद छड़ की कोई रेखीय गति नहीं होती, अर्थात छड़ के द्रव्यमान केन्द्र का रेखीय वेग शून्य होता है ($v_c = 0$).

जब दोनो द्रव्यमान छड़ से चिपक जाते है तो पूरा निकाय द्रव्यमान केन्द्र C के पारितः कोणीय संवेग होगा।

अतः प्रारम्भिक कोणीय संवेग

$$J_I = 2mva + m(2v)\,2a = 6\,m\,v\,a.$$

टक्कर के बाद छड़ तथा उससे चिपके दोनों द्रव्यमान (2m व m) द्रव्यमान केन्द्र C के परितः कोणीय वेग ω से घूर्णन करते है। छड़ (द्रव्यमान 8m तथा लम्बाई 6a) का C के परितः

जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{12} = \frac{8m(6a)^2}{12} = 24m\,a^2$ हैं

तथा 2m व m के C के परितः जड़त्व आघूर्ण क्रमशः $2ma^2$ है, तथा $4ma^2$ है। अतः टक्कर के बाद निकाय का कोणीय संवेग

$$J_f = (24ma^2 + 2ma^2 + 4ma^2)\,\omega = 30ma^2\omega$$

कोणीय संवेग संरक्षण से $J_I = J_f$ इससे

$$\omega = \frac{6mav}{30ma^2} = \frac{v}{5a}.$$

निकाय की कोणीय गतिज ऊर्जा

$$\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = \frac{1}{2}(30ma^2)\left(\frac{v}{5a}\right)^2 = \frac{3}{5}mv^2$$

उदा.29 एक डोरी r त्रिज्या के पहिए पर लपेटी जाती है। पहिये की अक्ष क्षैतिज है तथा परितः इसके जड़त्व आघूर्ण है। डोरी के एक सिरे पर भार mg बांधा जाता है, जिसे मुक्त रूप से गिरने दिया जाता है। h दूरी गिरेने पर, पहिए का कोणीय वेग होगा –

(A) $\sqrt{\frac{2gh}{I+mr}}$ (B) $\sqrt{\frac{2mgh}{I+mr^2}}$

(C) $\sqrt{\frac{2mgh}{I+2m}}$ (D) $\sqrt{2gh}$

हल (B)

$$mgh = (1/2)\,I\omega^2 + (1/2)\,mv^2$$

$$= (1/2)\,I\omega^2 + (1/2)\,mr^2\omega^2$$

या $2mgh = [I + mr^2]\omega^2$,

$$\therefore \omega = \left[\frac{2mgh}{I+mr^2}\right]^{1/2}$$

उदा.30 m द्रव्यमान R त्रिज्या के बेलन पर लिपटी भारहीन डोरी के एक सिरे पर m द्रव्यमान बांधा गया है। इस द्रव्यमान को छोड़ने पर इसका त्वरण होगा –

(A) g (B) g/2
(C) g/3 (D) 2g/3

हल : (D)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2\right]v^2/R^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

$$v = \sqrt{2ah} \quad [\because v^2 = u^2 + 2as]$$

$$\therefore \quad mgh = \frac{3}{4}m \times 2ah \quad \Rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

उदा.31 माना पृथ्वी तल पर गुरूत्वीय त्वरण का मान g है तथा k पृथ्वी की घूर्णन गतिज उर्जा है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या 2% की कमी आ जाय तो शेष सभी में राशियाँ समान हों तो –

(A) g में 2% की कमी K में 4% कमी
(B) g में 4% की कमी K में 2% कमी
(C) g में 4% की वृद्धि K में 4% कमी
(D) g में 4% की कमी K में 4% वृद्धि

हल : (C)

हम जानते है कि $g = \frac{GM}{R^2}$

दोनों तरफ लघु गुणंक लेने पर :

$\log g = \log GM - 2\log R$

$\Rightarrow \log g = \log G + \log M - 2\log R$

आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\Delta g}{g} = 0 + \frac{\Delta M}{M} - 2\frac{\Delta R}{R}$$

अतः प्रतिशत परिवर्तन g

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{\Delta M}{M} \times 100 - 2\frac{\Delta R}{R} \times 100$$

चूंकि त्रिज्या 2% कम होती है एवं बाकि राशियाँ नियत है अतः ($\therefore \Delta M = 0$) so

$$\frac{\Delta g}{g} \times 100 = 0 - \frac{2\left(\frac{-2}{100}R\right)\times 100}{R} = 4\%$$

समान रूप से घूर्णन गतिज उर्जा के लिये

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{5}MR^2\omega^2$$

अतः प्रतिशत परिवर्तन

$$\Rightarrow \frac{\Delta K}{K} \times 100 = \frac{\Delta M}{M} \times 100 + 2\frac{\Delta R}{R} \times 100 + 2\frac{1}{5}\frac{\Delta W}{W} \times 100$$

$$\Rightarrow \Delta M = 0,\ \Delta R = \left(\frac{-2}{100}R\right) \text{ and } \Delta W = 0$$

$\therefore \frac{\Delta K}{K} \times 100 = -4\%$ (K.E., 4% कम हो जाती है)

उदा.32 I जड़त्व आघूर्ण का ठोस गोला जब किसी नत समतल पर लुढ़ता है, तो घूर्णन गतिज ऊर्जा होगी

(A) 100% (B) 50%
(C) 28% (D) 72%

हल : (C)

गोले का व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

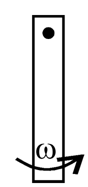
घूर्णन गतिज उर्जा $K_r = (1/2)I\omega^2 = (1/5)mr^2\omega^2$

रेखीय गतिज उर्जा $K_t = (1/2)mv^2 = (1/2)m.r^2\omega^2$

कुल उर्जा $K = K_r + K_t = \frac{7}{10}mr^2\omega^2$

अब $\frac{K_r}{K} \times 100\ \% = \frac{1/5}{7/10} \times 100\ \% = 28\ \%$

उदा.33 एक ℓ लम्बाई की एक समान पतली छड़ एक सिरे से लटकायी जाती है तथा इसे f चक्कर प्रति सैकण्ड की दर से घुमाया जाता है, छड़ की घूर्णन गतिज ऊर्जा होगी –



(A) $(2/3)\pi^2 f^2 m\ell^2$
(B) $(4/3) f^2 m\ell^2$
(C) $4\pi^2 f^2 m\ell^2$
(D) 0

हल : (A)

छड़ के अक्ष के लम्बवत् व अन्तय बिन्दु से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

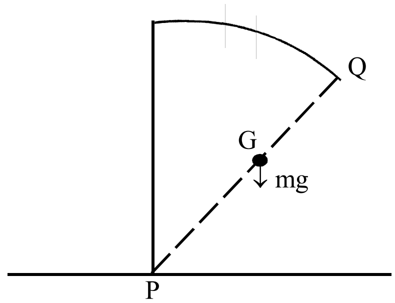
$$I, = \frac{M\ell^2}{3}$$

घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_r = 1/2\ I\omega^2 = (1/2)\frac{M\ell^2}{3}.(2\pi f)^2$$

$$= (2/3)\ m\ell^2.\pi^2 f^2$$

उदा.34 M द्रव्यमान व L लम्बाई की एक पतली छड़ PQ जिसका एक सिरा P फर्श पर जुड़ा है, प्रारम्भ में छड़ उध्वार्धर है। यदि इस वर्तमान स्थिति से छोड़ा जाये तो फर्श पर टकराने पर इसका कोणीय वेग होगा



(A) 3g/L

(B) $\sqrt{g/3L}$

(C) $\sqrt{3g/L}$

(D) $\sqrt{gL}$

हल : (C)

छड़ PQ के बिन्दु P से गुजरने वाली तथा छड़ के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

ऊर्जा सरंक्षण के सिद्धान्त से

$$Mgh = (1/2)\ I\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad m.g.\ (1/2)\ L = (1/2)\ \frac{mL^2}{3}\ \omega$$

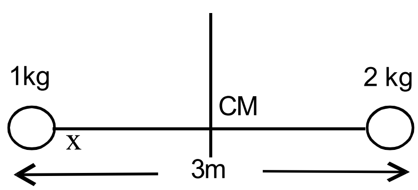
$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

उदा.35 1kg व 2kg द्रव्यमान की दो वस्तुऐं 3m लम्बी छड़ के किनारों पर व्यवस्थित है। यह छड़ निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के परितः 10 rad/sec के कोणीय वेग से घुमायी जाती है। निकाय की घूर्णन गतिज उर्जा होगी –

(A) 150 J (B) 755 J

(C) 300 J (D) 400 J

हल : (D)



माना निकाय का द्रव्यमान केन्द्र 1kg द्रव्यमान से x दूरी पर है।

अब द्रव्यमान केन्द्र के परितः द्रव्यमान आघूर्ण = 0

$\Rightarrow$ 1.x + 2.(3 - x) = 0 or x = 2

अब द्रव्यमान केन्द्र 1kg से 2m दूरी पर तथा केन्द्र 2kg से 1 m दूरी पर होगा

1kg द्रव्यमान का निकाय के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली व छड़ के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$\perp$ rod, $I_1 = 1.x^2 = 1.2^2 = 5$ kg-m^2

इसी प्रकार 2kg द्रव्यमान के लिए

$$I_2 = 2.1^2 = 3\text{kg m}^2$$

कुल जड़त्व आघूर्ण

$$I = I_1 + I_2 = 8 \text{ kg m}^2$$

घूर्णन गतिज उर्जा

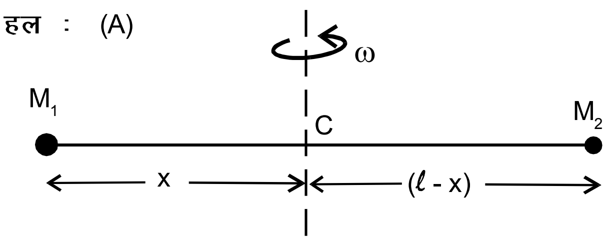
= (1/2) Iω^2 = (1/2) × 8 × 100 = 400 J

उदा.36 ℓ लम्बाई की एक छड़ के सिरों पर बिन्दु द्रव्यमान M_1 तथा M_2 रखे हुये हैं। छड़ का द्रव्यमान नगण्य है। छड़ को इसकी लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः घुमाया जाता है। छड़ पर ऐसी कौनसी स्थिति है जिससे गुजरने वाली अक्ष के परितः छड़ को कोणीय वेग ω से घुमाने पर न्यूनतम कार्य करना पड़े ?

(A) $\frac{M_2}{M_1+M_2}\ell$ (B) $\frac{M_1}{M_1+M_2}\ell$

(C) $\frac{M_1}{M_1-M_2}\ell$ (D) $\frac{M_2}{M_1-M_2}\ell$

हल : (A)



माना छड़ को बिन्दु C से गुजरने वाली अक्ष के परितः कोणीय वेग ω से घुमाया जाता है तथा C की द्रव्यमान M_1 वाले सिरे से njwh x है। निकाय का इस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = M_1x^2 + M_2\ (\ell - x)^2$$

छड़ को घुमाने में किया गया कार्य W,

छड़ द्वारा अर्जित घूर्णन ऊर्जा 1/2 I ω^2 के बराबर होगा :

$W = 1/2\ I\ \omega^2 = 1/2\ [M_1\ x^2 + M_2\ (\ell - x)^2]\ \omega^2$

W के न्यूनतम होने के लिये

$$\frac{dW}{dx} = 0$$

अथवा $2M_1\ x - 2M_2\ (\ell - x) = 0$

अथवा $x = \frac{M_2}{M_1+M_2}\ell$